

# Tema 7

## Momento angular

Alfonso V. Ramallo

La teoria del momento angular es de gran importancia en fisica cuantica y sera desarrollada en este tema. Como sabemos, el momento angular es el generador infinitesimal de las rotaciones espaciales. Por esta razon empezaremos nuestro analisis explorando dichas rotaciones y su realizacion en el formalismo cuantico.

### 1 Rotaciones espaciales

Consideremos las transformaciones de rotacion en el espacio tridimensional ordinario. Estas transformaciones estan caracterizadas por un eje de rotacion, determinado por un vector unitario  $\vec{n}$ , y un angulo de rotacion  $\theta$ . En primer lugar consideraremos el caso en el cual el angulo de rotacion  $\theta$  es infinitesimal. Sea  $\vec{v}$  un vector en  $\mathbb{R}^3$ . Bajo una rotacion de angulo  $\theta$  alrededor del eje en la direccion de  $\vec{n}$ , el vector  $\vec{v}$  es transformado en el vector  $\vec{v}'$ , tal como se muestra en la figura 1. Si  $\phi$  es el angulo formado por  $\vec{v}$  y el eje  $\vec{n}$ , el incremento en modulo de  $\vec{v}$ , para  $\theta$  infinitesimal, es:

$$|\delta\vec{v}| = |\vec{v}' - \vec{v}| = v \text{sen}\phi\theta . \quad (1.1)$$

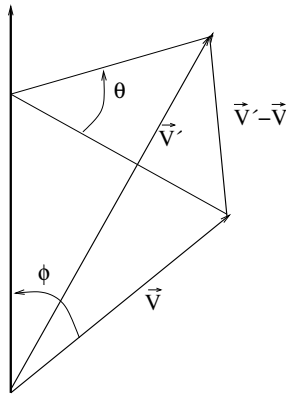


Figure 1: Variacion experimentada por un vector  $\vec{v}$  debido a una rotacion de angulo infinitesimal  $\theta$  respecto a un eje con el que forma un angulo  $\phi$ .

Puesto que  $\delta\vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{n}$  y a  $\vec{v}$ , esta relacion puede escribirse en forma vectorial como:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \theta \vec{n} \times \vec{v} . \quad (1.2)$$

Vamos a escribir esta ecuacion en componentes respecto a una base ortonormal  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . En esta base  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Entonces:

$$\vec{n} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (n_2 v_3 - n_3 v_2, n_3 v_1 - n_1 v_3, n_1 v_2 - n_2 v_1). \quad (1.3)$$

Esta relacion puede escribirse en forma de matriz como:

$$\vec{n} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Definamos ahora las siguientes tres matrices:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Entonces, la ecuacion (1.4) puede escribirse como:

$$\vec{n} \times \vec{v} = -i(T_1 n_1 + T_2 n_2 + T_3 n_3) \vec{v} = -i(\vec{T} \cdot \vec{n}) \vec{v}, \quad (1.6)$$

y la rotacion infinitesimal de  $\vec{v}$  se puede representar como:

$$\vec{v}' = R_{\vec{n}}(\theta) \vec{v}, \quad (1.7)$$

siendo  $R_{\vec{n}}(\theta)$  la matriz de rotacion infinitesimal:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = 1 - i\theta \vec{T} \cdot \vec{n}. \quad (1.8)$$

Las matrices  $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$  se dice que son los **generadores infinitesimales** de las rotaciones. Dichas matrices satisfacen las siguientes reglas de conmutacion:

$$[T_1, T_2] = iT_3, \quad [T_2, T_3] = iT_1, \quad [T_3, T_1] = iT_2. \quad (1.9)$$

De forma mas compacta estas relaciones de conmutacion se pueden poner como:

$$\boxed{[T_i, T_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} T_k} \quad (1.10)$$

Comprobemoslo para el caso del conmutador  $[T_1, T_2]$ :

$$\begin{aligned}
T_1 T_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
T_2 T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
[T_1, T_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = iT_3. \tag{1.11}
\end{aligned}$$

Obervemos tambien que los elementos de matriz de las  $T$ 's se pueden escribir como:

$$\boxed{(T_i)_{jk} = -i \epsilon_{ijk}} \tag{1.12}$$

Ademas, como se puede comprobar inmediatamente de su expresion explicita en (1.5), las matrices  $T_i$  son hermiticas:

$$T_i^\dagger = T_i. \tag{1.13}$$

Consideremos ahora una rotacion finita. Si el angulo  $\theta$  no es infinitesimal, la matriz de rotacion  $R_{\vec{n}}(\theta)$  se puede obtener iterando muchas rotaciones infinitesimales. Asi, por ejemplo, podemos dividir  $\theta$  por un entero  $N$  y escribir:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \left[ R_{\vec{n}}\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]^N, \quad (N \rightarrow \infty). \tag{1.14}$$

Entonces, como el angulo  $\frac{\theta}{N}$  es muy pequeño cuando  $N$  es muy grande, podemos utilizar (1.8) para obtener la matriz de rotacion y escribir:

$$R_{\vec{n}}(\theta) = \left[ 1 - i \frac{\theta}{N} \vec{T} \cdot \vec{n} \right]^N. \tag{1.15}$$

Cuando  $N \rightarrow \infty$  la expresion anterior se puede poner en forma exponencial. En efecto, dado que:

$$1 - i \frac{\theta}{N} \vec{T} \cdot \vec{n} \approx e^{-i \frac{\theta}{N} \vec{T} \cdot \vec{n}}, \tag{1.16}$$

podemos escribir:

$$\left[ 1 - i \frac{\theta}{N} \vec{T} \cdot \vec{n} \right]^N \approx \left[ e^{-i \frac{\theta}{N} \vec{T} \cdot \vec{n}} \right]^N = e^{-i \theta \vec{T} \cdot \vec{n}}. \tag{1.17}$$

Alternativamente esta ultima ecuacion se puede probar utilizando la definicion de  $e^x$  como limite:

$$e^x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N . \quad (1.18)$$

En cualquier caso, si el angulo  $\theta$  es finito la matriz de rotacion a lo largo del eje  $\vec{n}$  es:

$$\boxed{R_{\vec{n}}(\theta) = e^{-i\theta \vec{T} \cdot \vec{n}}} \quad (1.19)$$

Comprobemos explicitamente que (1.19) da lugar a la matriz de rotacion en el caso de una rotacion a lo largo del eje  $z$  (en la direccion de  $\vec{e}_3$ ). Si  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} R_z(\theta) &= e^{-i\theta T_3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\theta T_3)^n = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} (T_3)^{2p} - i \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} (T_3)^{2p+1} . \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pero el cuadrado de la matriz  $T_3$  es:

$$T_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (1.21)$$

y, por lo tanto,  $T_3^2$  actua como la unidad en el subespacio generado por los vectores  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Es claro que  $T_3^3 = T_3^2 T_3 = T_3$ . En general, se tiene:

$$(T_3)^{2p} = (T_3)^2 , \quad (p \geq 1) , \quad (T_3)^{2p+1} = T_3 , \quad (p \geq 0) . \quad (1.22)$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, asi como la representacion en serie de Taylor de las funciones coseno y seno:

$$\cos \theta = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!} , \quad \text{sen} \theta = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} , \quad (1.23)$$

se tiene:

$$e^{-i\theta T_3} = 1 + (\cos \theta - 1) T_3^2 - i \text{sen} \theta T_3 . \quad (1.24)$$

Calculemos los diferentes terminos en el segundo miembro de esta expresion:

$$\begin{aligned} 1 + (\cos \theta - 1) T_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -0 & 0 \\ 0 & \cos \theta - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \\ -i \text{sen} \theta T_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -\text{sen} \theta & 0 \\ \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (1.25)$$

Entonces, substituyendo estos resultados en el segundo miembro de (1.24), podemos escribir:

$$e^{-i\theta T_3} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta & 0 \\ \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

que es, efectivamente, la matriz de rotacion a lo largo del eje  $\vec{e}_3$ .

Observemos que, dado que las matrices  $T_i$  son hermiticas (vease (1.13)), se tiene:

$$\left[ R_{\vec{n}}(\theta) \right]^\dagger = e^{i\theta \vec{T}^\dagger \cdot \vec{n}} = e^{i\theta \vec{T} \cdot \vec{n}} = \left[ R_{\vec{n}}(\theta) \right]^{-1}. \quad (1.27)$$

Es decir, las **matrices de rotacion son unitarias**.

## 2 Las rotaciones en mecanica cuantica

Veamos ahora como se realizan las rotaciones espaciales en el espacio de estados  $\mathcal{H}$ . Para cada rotacion  $R_{\vec{n}}(\theta)$  deberia de haber un operador unitario  $U_{\vec{n}}(\theta)$  que realiza la rotacion espacial en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ :

$$|\psi\rangle \rightarrow U_{\vec{n}}(\theta) |\psi\rangle \equiv |\psi\rangle_R. \quad (2.1)$$

La norma de  $|\psi\rangle_R$  deberia ser la misma que la norma del estado antes de rotar. Como:

$${}_R\langle\psi|\psi\rangle_R = \langle\psi| U_{\vec{n}}^\dagger(\theta) U_{\vec{n}}(\theta) |\psi\rangle, \quad (2.2)$$

esta invariancia de la norma esta garantizada si el operador  $U_{\vec{n}}(\theta)$  es unitario, es decir si  $U_{\vec{n}}^\dagger(\theta) = U_{\vec{n}}^{-1}(\theta)$ .

Representemos  $U_{\vec{n}}(\theta)$  de manera similar a como se realiza la matriz de rotacion sobre las coordenadas, es decir como la exponencial de unos generadores infinitesimales  $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ :

$$\boxed{U_{\vec{n}}(\theta) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n} \right]} \quad (2.3)$$

Para que  $U_{\vec{n}}(\theta)$  sea unitario los generadores  $J_i$  deben de ser hermiticos, es decir tienen que verificar:

$$J_i^\dagger = J_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Es posible determinar las relaciones de conmutacion de los generadores  $J_i$  de forma general sin conocer su forma explicita. Para ello consideremos una rotacion de angulo  $\theta$  alrededor de un eje  $\vec{n}(\phi)$  en el plano  $yz$  que forma un angulo  $\phi$  respecto al eje  $y$  (ver figura 2). Esta rotacion se puede obtener llevando primero el eje  $\vec{n}$  al eje  $y$  por medio de una rotacion  $R_x(-\phi)$ , seguida de una rotacion  $R_y(\theta)$  de angulo  $\theta$  alrededor del eje  $y$  y, finalmente, llevamos el eje de rotacion a su posicion original

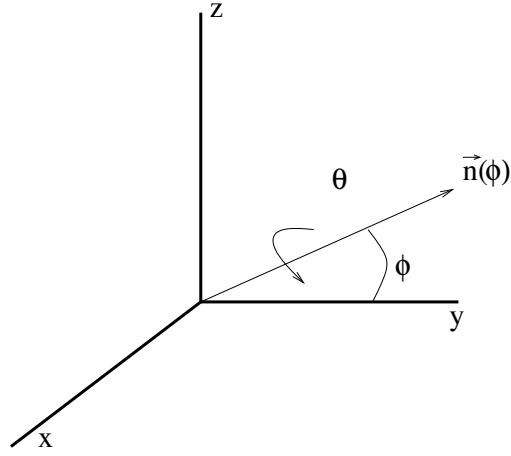


Figure 2: Rotacion de angulo  $\theta$  alrededor del eje  $\vec{n}(\phi)$ , que esta contenido en el plano  $yz$  y forma un angulo  $\phi$  con el eje  $y$ .

por medio de una rotacion  $R_x(\phi)$ . Estas operaciones se realizan sobre los estados de  $\mathcal{H}$  por medio del operador:

$$U_{\vec{n}(\phi)}(\theta) = U_x(\phi) U_y(\theta) U_x(-\phi) , \quad (2.5)$$

donde  $\vec{n} = (0, \cos \phi, \text{sen} \phi)$ . En terminos de  $\vec{J}$  la relacion anterior es:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1} . \quad (2.6)$$

Consideremos esta relacion para  $\theta$  pequeño. A primer orden en  $\theta$  el primer miembro de (2.6) es:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n}} \approx 1 - \frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n} . \quad (2.7)$$

Por otra parte, el segundo miembro de (2.6) es:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} e^{-\frac{i}{\hbar} \theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1} \approx e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \theta J_2 \right) e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1} = 1 - \frac{i}{\hbar} \theta e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} J_2 e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1} . \quad (2.8)$$

Igualando los coeficientes de  $\theta$  de ambos miembros, se llega a:

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} J_2 e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1} . \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta la expresion de  $\vec{n}$ , esta ultima ecuacion se convierte en:

$$\boxed{\cos \phi J_2 + \text{sen} \phi J_3 = e^{-\frac{i}{\hbar} \phi J_1} J_2 e^{\frac{i}{\hbar} \phi J_1}} \quad (2.10)$$

Consideremos ahora  $\phi$  pequeño y hagamos la expansion de ambos miembros de (2.10) a primer orden en  $\phi$ :

$$\begin{aligned} J_2 + \phi J_3 &\approx \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \phi J_1 \right) J_2 \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \phi J_1 \right) \approx \\ &\approx J_2 - \frac{i}{\hbar} \phi (J_1 J_2 - J_2 J_1) = J_2 - \frac{i}{\hbar} \phi [J_1, J_2] . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Igualando los coeficientes de  $\phi$  en los dos miembros, llegamos a:

$$J_3 = -\frac{i}{\hbar} [J_1, J_2] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{[J_1, J_2] = i\hbar J_3} \quad (2.12)$$

De forma similar, considerando rotaciones en torno a ejes contenidos en los planos  $xy$  y  $xz$ , se obtiene:

$$\boxed{[J_2, J_3] = i\hbar J_1} \quad \boxed{[J_3, J_1] = i\hbar J_2} \quad (2.13)$$

De forma mas compacta, estos conmutadores se pueden escribir como:

$$\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k} \quad (2.14)$$

Estas relaciones de conmutacion, que tienen gran importancia en el desarrollo de la mecanica cuantica, son, excepto por el factor  $\hbar$  del segundo miembro, identicas a las satisfechas por las matrices  $T_i$ . Como hemos visto se obtienen como una relacion de consistencia y no es necesario conocer explicitamente la expresion de  $\vec{J}$ .

Diremos que un operador  $\mathcal{S}$  es **escalar** si sus valores esperados son invariantes bajo rotaciones espaciales. Sea  $U(R)$  el operador que realiza la rotacion  $R$  en el espacio de estados:

$$|\varphi\rangle_R = U(R) |\varphi\rangle . \quad (2.15)$$

Por ser  $\mathcal{S}$  un operador escalar deberiamos tener, para todo  $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ :

$${}_R\langle\varphi|\mathcal{S}|\varphi\rangle_R = \langle\varphi|U(R)^\dagger \mathcal{S}U(R)|\varphi\rangle = \langle\varphi|\mathcal{S}|\varphi\rangle . \quad (2.16)$$

Por lo tanto, puesto que  $|\varphi\rangle$  es un estado arbitrario, se tiene que verificar:

$$U(R)^\dagger \mathcal{S}U(R) = \mathcal{S} . \quad (2.17)$$

Explicitamente, para una rotacion  $R_{\vec{n}}(\theta)$ :

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}\theta \vec{J} \cdot \vec{n}\right] \mathcal{S} \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\theta \vec{J} \cdot \vec{n}\right] = \mathcal{S} . \quad (2.18)$$

Tomando  $\theta$  infinitesimal, esta relacion es equivalente a:

$$[\vec{J} \cdot \vec{n}, \mathcal{S}] = 0 , \quad (2.19)$$

y como  $\vec{n}$  es arbitrario, debemos de tener:

$$\boxed{[\vec{J}, \mathcal{S}] = 0} \quad (2.20)$$

Asi pues, **un operador invariante bajo rotaciones conmuta con los generadores de rotaciones.**

Consideremos ahora el caso particular en el que el operador escalar  $\mathcal{S}$  es el hamiltoniano  $H$  del sistema, es decir el caso en el cual el hamiltoniano es invariante bajo rotaciones. Esto sucede necesariamente cuando el sistema esta aislado de toda influencia exterior. Efectivamente, debido a la **isotropia del espacio**, si el sistema esta aislado todas las direcciones del espacio son equivalentes y, necesariamente,  $H$  tiene que ser invariante bajo rotaciones. Segun nuestro analisis anterior ello significa que  $H$  y  $\vec{J}$  conmutan:

$$[H, \vec{J}] = 0 . \quad (2.21)$$

Observemos que  $\vec{J}$  es un operador hermitico, al que cabe asociar un observable. Ademas, segun el teorema de Ehrenfest, el valor esperado de  $\vec{J}$  en un estado  $|\psi\rangle$ , que denotaremos por  $\langle \vec{J} \rangle_\psi$ , varia con el tiempo en la forma:

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{J} \rangle_\psi = -\frac{i}{\hbar} \langle [\vec{J}, H] \rangle_\psi = 0 , \quad (2.22)$$

es decir  $\vec{J}$  es una cantidad conservada (una constante de movimiento) en todo sistema invariante bajo rotaciones. Dicha cantidad conservada tiene que ser proporcional al **momento angular**. De hecho hemos introducido la constante  $\hbar$  en la exponencial  $U_{\vec{n}}(\theta)$  para que  $\vec{J}$  sea precisamente el **momento angular total del sistema**.

### 3 Simetrias y leyes de conservacion

Supongamos que tenemos un operador unitario  $U_\alpha$ , dependiendo de un parametro continuo  $\alpha \in \mathbb{R}$ , en la forma:

$$U_\alpha = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha G} , \quad (3.1)$$

siendo  $G$  un operador. Como  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se sigue que el operador  $G$  es hermitico porque  $U_\alpha$  es unitario. El operador  $G$  se denomina **generador infinitesimal** de la transformacion  $|\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle_\alpha = U_\alpha |\psi\rangle$ . Supongamos que  $U_\alpha$  deje invariante el hamiltoniano, es decir sea tal que:

$$U_\alpha^{-1} H U_\alpha = H , \quad (3.2)$$

se dice entonces que la transformacion es una **simetria** del sistema. Considerando  $\alpha$  infinitesimal la invariancia de  $H$  bajo la transformacion implica que  $H$  conmuta con el generador  $G$ :

$$[H, G] = 0 , \quad (3.3)$$

y, si  $G$  no depende explicitamente del tiempo su valor esperado en el estado  $|\psi\rangle$  es constante en el tiempo:

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle_\psi = 0 . \quad (3.4)$$

Asi pues  $G$  es un **observable** (pues es hermitico) **conservado**. Hemos ya visto que la invariancia bajo rotaciones implica la conservacion del momento angular. Lo

expuesto mas arriba generaliza esta relacion entre simetria de  $H$  y ley de conservacion. Otro ejemplo de esta relacion es la invariancia bajo traslaciones espaciales, cuyo generador es el operador momento  $\vec{P}$ . Debido a la homogeneidad del espacio todo sistema aislado debe de ser invariante bajo traslaciones espaciales, lo cual implica que el momento  $\vec{P}$  se conserva.

## 4 Realizacion sobre las funciones de onda

Veamos ahora como actuan las rotaciones sobre las funciones de onda en la representacion de coordenadas. Sea  $|\psi\rangle_R \equiv U_{\vec{n}}(\theta) |\psi\rangle$  el estado transformado. La correspondiente funcion de onda transformada en la representacion- $\vec{r}$  es:

$$\psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle_R . \quad (4.1)$$

Observemos que:

$$\psi'(\vec{r}) = \langle \vec{r} | U_{\vec{n}}(\theta) | \psi \rangle . \quad (4.2)$$

Pero  $U_{\vec{n}}(\theta)$  actua sobre el estado  $|\vec{r}\rangle$  como:

$$U_{\vec{n}}(\theta) |\vec{r}\rangle = |R_{\vec{n}}(\theta) \vec{r}\rangle \quad (4.3)$$

siendo  $R_{\vec{n}}(\theta) = e^{-i\theta \vec{T} \cdot \vec{n}}$  es la matriz de rotacion en el espacio de posiciones. Para simplificar la notacion, en adelante suprimiremos la dependencia en  $\theta$  en  $U_{\vec{n}}$  y  $R_{\vec{n}}$ . Para obtener:

$$\langle \vec{r} | U_{\vec{n}} = \left( U_{\vec{n}}^\dagger | \vec{r} \rangle \right)^\dagger = \left( U_{\vec{n}}^{-1} | \vec{r} \rangle \right)^\dagger , \quad (4.4)$$

escribamos como actua la rotacion inversa sobre los autoestados de posicion:

$$U_{\vec{n}}^{-1} | \vec{r} \rangle = | R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r} \rangle . \quad (4.5)$$

Tomado hermitico conjugado de esta ultima relacion, tenemos:

$$\langle \vec{r} | U_{\vec{n}} = \langle R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r} | . \quad (4.6)$$

Por lo tanto, utilizando este resultado en (4.2), llegamos a:

$$\psi'(\vec{r}) = \langle R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r} | \psi \rangle = \psi(R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r}) , \quad (4.7)$$

que es equivalente a escribir:

$$\langle \vec{r} | U_{\vec{n}} | \psi \rangle = \psi(R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r}) , \quad (4.8)$$

lo cual quiere decir que el operador de rotaciones actua sobre las funciones de onda como:

$$\boxed{[U_{\vec{n}} \psi](\vec{r}) = \psi(R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r})} \quad (4.9)$$

Consideremos ahora el caso en el que el angulo de rotacion  $\theta$  sea infinitesimal. Puesto que  $U_{\vec{n}}(\theta) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n} \right]$ , expandiendo en serie de potencias y quedandose a primer orden en  $\theta$ :

$$[U_{\vec{n}} \psi](\vec{r}) \approx \psi(\vec{r}) - \frac{i}{\hbar} \theta \vec{J} \cdot \vec{n} \psi(\vec{r}) . \quad (4.10)$$

Por otra parte:

$$R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r} \approx \vec{r} - \theta \vec{n} \times \vec{r} \equiv \vec{r} + \delta \vec{r} . \quad (4.11)$$

Expandiendo en serie de Taylor el segundo miembro de (4.9), llegamos a:

$$\psi(R_{\vec{n}}^{-1} \vec{r}) \approx \psi(\vec{r} + \delta \vec{r}) \approx \psi(\vec{r}) + \vec{\nabla} \psi \cdot \delta \vec{r} = \psi(\vec{r}) - \theta \vec{n} \times \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi . \quad (4.12)$$

Igualando los dos miembros de (4.9) a primer orde en  $\theta$  obtenemos:

$$\frac{i}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{n} \psi(\vec{r}) = \vec{n} \times \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \psi . \quad (4.13)$$

Pero, dados tres vectores arbitrarios  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  de  $\mathbb{R}^3$  se verifica que  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ . Por tanto:

$$\vec{\nabla} \psi \cdot (\vec{n} \times \vec{r}) = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla} \psi) \quad \implies \quad \frac{i}{\hbar} \vec{J} \cdot \vec{n} \psi(\vec{r}) = \vec{n} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \psi(\vec{r}) . \quad (4.14)$$

Dado que el vector  $\vec{n}$  es arbitrario, se tiene:

$$\boxed{\vec{J} \psi(\vec{r}) = -i\hbar (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \psi(\vec{r})} \quad (4.15)$$

Esto nos da una realizacion del momento angular sobre las funciones de onda en la representacion de coordenadas que se denomina **momento angular orbital** y se denota con la letra  $\vec{L}$ . Asi hemos visto que  $\vec{L}$  puede representarse como el operador diferencial:

$$\boxed{\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}} \quad (4.16)$$

o, dado que el operador momento lineal es  $\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$ , el operador momento angular orbital se puede poner como:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}} \quad (4.17)$$

En componentes, tenemos:

$$\boxed{L_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j P_k} \quad (4.18)$$

A partir de las relaciones canonicas de conmutacion  $[x_i, P_j] = i\hbar \delta_{ij}$ , puede probarse facilmente que el conmutador de las componentes de  $\vec{L}$  consigo mismas es:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} L_k , \quad (4.19)$$

es decir, son las mismas que las de los  $J_i$ , como deberia de ser.

## 5 El espin

Experimentalmente se verifica que los estados de las partículas cuánticas no pueden ser descritos solamente por la posición  $\vec{r}$  y, de hecho, el momento angular orbital  $\vec{L}$  no se conserva. Además, un protón o un electrón tienen momento angular aunque su momento lineal  $\vec{P}$  sea nulo, es decir **pueden tener momento angular no debido al movimiento**. Esto quiere decir que, en la base de posición, junto con  $\vec{r}$  debemos de añadir un número cuántico discreto  $m$  a nuestra base de estados, que de cuenta del momento angular intrínseco (es decir no ligado al movimiento) de la partícula. Dicha base será pues de la forma  $\{|\vec{r}, m\rangle\}$ . En el caso del electrón  $m$  puede tomar dos valores distintos, tal como se deduce del experimento de Stern-Gerlach. En general, bajo una rotación las diferentes  $m$  se mezclan en la forma:

$$U_{\vec{n}}(\theta)|\vec{r}, m\rangle = \sum_{m'} |R_{\vec{n}}(\theta)\vec{r}, m'\rangle D_{m' m}(\vec{n}, \theta). \quad (5.1)$$

La matriz  $D_{m' m}(\vec{n}, \theta)$  se puede también escribir en términos de unos generadores infinitesimales  $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ :

$$D_{m' m}(\vec{n}, \theta) = \left[ \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta\vec{S}\cdot\vec{n}\right) \right]_{m' m}. \quad (5.2)$$

Las  $S_i$ 's son matrices hermiticas que, por consistencia, deben de satisfacer las mismas relaciones de conmutación que hemos encontrado para los operadores  $J_i$ , es decir:

$$[S_i, S_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} S_k. \quad (5.3)$$

Más adelante encontraremos la forma general de las matrices  $S_i$ . En el caso del electrón  $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ , siendo  $\sigma_i$  las matrices de Pauli. En general estos generadores  $\vec{S}$  deben de interpretarse como los operadores que representan un **momento angular intrínseco** que se denomina **espin**. El momento angular total  $\vec{J}$  será la suma del momento angular orbital  $\vec{L}$  y del espin  $\vec{S}$ :

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}} \quad (5.4)$$

Además, dado que  $\vec{L}$  es un operador diferencial que actúa sobre  $\vec{r}$  y  $\vec{S}$  actúa sobre el número cuántico discreto  $m$ , es claro que que  $\vec{L}$  y  $\vec{S}$  conmutan:

$$[L_i, S_j] = 0. \quad (5.5)$$

Como vemos en las ecuaciones (2.14), (4.19) y (5.3) los operadores  $J_i$ ,  $L_i$  y  $S_i$  satisfacen las mismas relaciones de conmutación consigo mismos. Estas relaciones son suficientes para encontrar su espectro, tal como vamos a probar a continuación.

## 6 El algebra del momento angular

Vamos a encontrar las representaciones finito-dimensionales de los operadores  $J_i$  que satisfacen el algebra de conmutadores siguiente:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k . \quad (6.1)$$

Los resultados que vamos a obtener son validos para  $L_i$  y  $S_i$  con alguna modificacion. Observemos, en primer lugar, que  $J_1$ ,  $J_2$  y  $J_3$  no conmutan entre si y, por lo tanto, no son simultaneamente diagonalizables. Sin embargo vamos a probar que  $J^2$ , definido como:

$$J^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 , \quad (6.2)$$

conmuta con  $J_i$ :

$$\boxed{[J^2, J_i] = 0} \quad (6.3)$$

Para demostrarlo pongamos  $J^2 = \sum_j J_j^2$  y hagamos:

$$\begin{aligned} [J^2, J_i] &= \sum_j [J_j^2, J_i] = \sum_j [J_j, J_i] J_j + \sum_j J_j [J_j, J_i] = \\ &= i\hbar \sum_{jk} \epsilon_{jik} J_k J_j + i\hbar \sum_{jk} J_j \epsilon_{jik} J_k = i\hbar \sum_{jk} (\epsilon_{jik} + \epsilon_{kij}) J_k J_j = 0 , \end{aligned} \quad (6.4)$$

donde, en el penultimo paso hemos cambiando  $j \leftrightarrow k$  en la segunda suma y hemos utilizado las propiedades de antisimetria del simbolo de Levi-Civita para probar la ultima igualdad. Asi pues podemos diagonalizar simultaneamente  $J^2$  y una componente de  $\vec{J}$ . Es convencional utilizar la componente  $J_3 = J_z$  y, entonces, al eje  $x^3 = z$  se le denomina **eje de cuantizacion**.

Definamos ahora los **operadores escalera**  $J_{\pm}$  como:

$$\boxed{J_{\pm} \equiv J_1 \pm iJ_2} \quad (6.5)$$

Observemos que:

$$(J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp} , \quad (6.6)$$

pues  $J_1$  y  $J_2$  son hermiticos. Probemos algunas relaciones de conmutacion de los  $J_{\pm}$ . En primer lugar calculemos  $[J_3, J_{\pm}]$ :

$$[J_3, J_{\pm}] = [J_3, J_1] \pm i[J_3, J_2] = i\hbar J_2 \mp i^2 \hbar J_1 = \pm\hbar(J_1 \pm iJ_2) . \quad (6.7)$$

Es decir:

$$\boxed{[J_3, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}} \quad (6.8)$$

Ademas:

$$[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] = -i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] . \quad (6.9)$$

Teniendo en cuenta que  $[J_1, J_2] = -[J_2, J_1] = i\hbar J_3$ , llegamos a:

$$\boxed{[J_+, J_-] = 2\hbar J_3} \quad (6.10)$$

Por otra parte, puesto que  $J^2$  conmuta con  $J_1$  y  $J_2$ , se sigue trivialmente que:

$$\boxed{[J^2, J_{\pm}] = 0} \quad (6.11)$$

Ademas:

$$J_+ J_- + J_- J_+ = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ_2) + (J_1 - iJ_2)(J_1 + iJ_2) = 2(J_1^2 + J_2^2), \quad (6.12)$$

o, equivalentemente:

$$J_1^2 + J_2^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+). \quad (6.13)$$

Entonces  $J^2$  se puede escribir como:

$$\boxed{J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2} \quad (6.14)$$

En otro orden de cosas, la relacion de conmutacion (6.10) permite escribir:

$$J_+ J_- = J_- J_+ + 2\hbar J_3, \quad J_- J_+ = J_+ J_- - 2\hbar J_3, \quad (6.15)$$

y, por consiguiente, se tiene:

$$\frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) = J_+ J_- - \hbar J_3 = J_- J_+ + \hbar J_3. \quad (6.16)$$

Combinando esta ultima relacion con (6.14) podemos escribir:

$$\begin{aligned} J^2 = J_+ J_- - \hbar J_3 + J_3^2 &\implies J_+ J_- = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3, \\ J^2 = J_- J_+ + \hbar J_3 + J_3^2 &\implies J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Resumamos todas las relaciones de conmutacion que hemos obtenida mas arriba en una tabla:

$[J^2, J_i] = 0,$	$[J_3, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm},$
$[J^2, J_{\pm}] = 0,$	$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3,$
$J_+ J_- = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3,$	$J_- J_+ = J^2 - J_3^2 - \hbar J_3,$
$J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_3^2$	

## 7 Autovalores del momento angular

Vamos ahora a utilizar las relaciones de conmutacion encontradas para obtener los autovalores y autovectores del operador momento angular. Como  $J^2$  y  $J_3$  conmutan vamos a diagonalizarlos simultaneamente. Sean  $\hbar^2 a$  y  $\hbar b$  los autovalores de  $J^2$  y  $J_3$  respectivamente y denotemos por  $|a, b\rangle$  el correspondiente autovector (hemos incluido los factores de  $\hbar$  en los autovalores por conveniencia):

$$J^2 |a, b\rangle = \hbar^2 a |a, b\rangle, \quad J_3 |a, b\rangle = \hbar b |a, b\rangle. \quad (7.1)$$

Probemos primero que los autovalores  $b$  de  $J_3$  estan restringidos a tomar valores en un determinado rango. En efecto, se tiene:

$$\langle a, b | (J^2 - J_3^2) |a, b\rangle = \langle a, b | (J_1^2 + J_2^2) |a, b\rangle \geq 0, \quad (7.2)$$

puesto que  $J_1^2 + J_2^2$  es un operador definido positivo. Dado que:

$$\langle a, b | (J^2 - J_3^2) |a, b\rangle = \hbar^2 (a - b^2) \langle a, b |a, b\rangle = \hbar^2 (a - b^2), \quad (7.3)$$

entonces se sigue que:

$$\boxed{b^2 \leq a} \quad (7.4)$$

Consideremos ahora el vector  $J_+ |a, b\rangle$ . Como  $[J^2, J_+] = 0$ , este vector sigue siendo autovector de  $J^2$  con autovalor  $\hbar^2 a$ :

$$J^2 J_+ |a, b\rangle = J_+ J^2 |a, b\rangle = \hbar^2 a J_+ |a, b\rangle. \quad (7.5)$$

Sin embargo,  $J_+ |a, b\rangle$  es autovector de  $J_3$  con autovalor  $\hbar(b+1)$ :

$$J_3 J_+ |a, b\rangle = ([J_3, J_+] + J_+ J_3) |a, b\rangle = (\hbar J_+ + J_+ J_3) |a, b\rangle = \hbar(b+1) J_+ |a, b\rangle, \quad (7.6)$$

Asi pues,  $J_+ |a, b\rangle \sim |a, b+1\rangle$ . Escribamos:

$$J_+ |a, b\rangle = C(a, b) |a, b+1\rangle, \quad (7.7)$$

siendo  $C(a, b)$  una constante a determinar. De forma similar

$$J_- |a, b\rangle = D(a, b) |a, b-1\rangle, \quad (7.8)$$

donde  $D(a, b)$  es otra constante. Ahora bien, hemos visto en (7.4) que  $b$  esta acotado superiormente y debe de satisfacer  $b^2 \leq a$ . Sea  $b_{\max}$  el valor maximo de  $b$ . Si actuamos con  $J_+$  en el estado  $|a, b_{\max}\rangle$  no deberia darnos  $|a, b_{\max} + 1\rangle$  sino cero:

$$J_+ |a, b_{\max}\rangle = 0. \quad (7.9)$$

De forma similar, actuando con  $J_-$  el valor de  $b$  disminuye y cuando se haga muy negativo violaria la cota (7.4). Por tanto, deberia de haber un valor  $b_{\min}$  tal que:

$$J_- |a, b_{\min}\rangle = 0. \quad (7.10)$$

Ahora bien actuando con  $J_-$  sobre (7.9) y utilizando (6.17) obtenemos:

$$J_- J_+ |a, b_{\max}\rangle = (J^2 - J_3^2 - \hbar J_3) |a, b_{\max}\rangle = 0 . \quad (7.11)$$

Teniendo en cuenta (7.1), esta ultima ecuacion se convierte en:

$$\hbar^2 (a - b_{\max}^2 - b_{\max}) |a, b_{\max}\rangle = 0 , \quad (7.12)$$

que implica que:

$$\boxed{a = b_{\max}(b_{\max} + 1)} \quad (7.13)$$

De forma similar, actuando con  $J_+$  sobre (7.10) se llega a:

$$J_+ J_- |a, b_{\min}\rangle = (J^2 - J_3^2 + \hbar J_3) |a, b_{\min}\rangle = 0 \implies (a - b_{\min}^2 + b_{\min}) |a, b_{\min}\rangle = 0 , \quad (7.14)$$

que da lugar a la siguiente relacion entre  $a$  y  $b_{\min}$ :

$$\boxed{a = b_{\min}(b_{\min} - 1)} \quad (7.15)$$

Consideremos esta ultima relacion entre  $b_{\min}$  y  $a$  como una ecuacion cuadratica para  $b_{\min}$ :

$$b_{\min}^2 - b_{\min} - a = 0 \implies b_{\min} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2} . \quad (7.16)$$

Usando que  $a = b_{\max}(b_{\max} + 1)$  en (7.16), obtenemos:

$$b_{\min} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4b_{\max}^2 + 4b_{\max}}}{2} = \frac{1 \pm (2b_{\max} + 1)}{2} = \begin{cases} b_{\max} + 1 , \\ -b_{\max} . \end{cases} \quad (7.17)$$

Claramente,  $b_{\min}$  no puede ser mayor que  $b_{\max}$ , por lo que la unica solucion valida de esta ultima ecuacion es:

$$\boxed{b_{\min} = -b_{\max}} \quad (7.18)$$

Desde el punto de vista fisico esta solucion era esperada pues no deberia haber diferencia entre las dos direcciones del eje de cuantizacion  $x^3$ .

Supongamos que actuamos repetitivamente con  $J_-$  sobre el estado  $|a, b_{\max}\rangle$ . Cada vez que actuamos disminuimos el autovalor de  $J_3$  en  $\hbar$ . Es claro que debe de existir un entero  $N$  tal que:

$$(J_-)^N |a, b_{\max}\rangle \sim |a, b_{\min}\rangle , \quad (7.19)$$

es decir tal que con  $N$  operaciones pasemos de  $b_{\max}$  a  $b_{\min}$ . En consecuencia, se tiene que:

$$N = b_{\max} - b_{\min} = 2b_{\max} , \quad (7.20)$$

donde, en el ultimo paso hemos utilizado que  $b_{\min} = -b_{\max}$ . En definitiva, tenemos:

$$\boxed{b_{\max} = \frac{N}{2}} \quad \boxed{a = b_{\max}(b_{\max} + 1) = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right)} \quad (7.21)$$

siendo  $N$  un entero mayor o igual a cero. El numero  $b_{\max}$  se denomina simplemente **momento angular** del estado  $|a, b\rangle$  y se denota convencionalmente por  $j$ . Del analisis precedente se sigue que  $j$  es **entero** (si  $N$  es par) o **semientero** (si  $N$  es impar). El estado  $|a, b\rangle$  se etiqueta convencionalmente por el valor de  $j$ , en lugar de por  $a = j(j + 1)$ . Ademas, el autovalor  $b$  de  $J_3$  se denota normalmente por  $m$  y se denomina **numero cuantico magnetico**. Hemos visto mas arriba que  $m$  puede tomar los  $2j + 1$  valores comprendidos entre  $-j$  y  $+j$ :

$$\boxed{m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j} \quad 2j \in \mathbb{Z} \quad (7.22)$$

Entonces, tras este cambio de notacion las ecuaciones de autovalores de  $J^2$  y  $J_3$  son:

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j + 1) \hbar^2 |j, m\rangle \\ J_3 |j, m\rangle &= m \hbar |j, m\rangle \\ 2j \in \mathbb{Z}, j \geq 0, \quad -j \leq m \leq j \end{aligned}$$

Obtengamos ahora los elementos de matriz de  $J_{\pm}$ . Si escribimos:

$$J_+ |j, m\rangle = C(j, m) |j, m + 1\rangle, \quad (7.23)$$

y su hermitico conjugado:

$$\langle j, m | J_- = C^*(j, m) \langle j, m + 1 |, \quad (7.24)$$

y multiplicamos ambas expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned} |C(j, m)|^2 &= \langle j, m | J_- J_+ |j, m\rangle = \langle j, m | (J^2 - J_3^2 - \hbar J_3) |j, m\rangle = \\ &= \hbar^2 [j(j + 1) - m(m + 1)]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Escogiendo la fase de  $C(j, m)$  adecuadamente, tenemos:

$$\boxed{C(j, m) = \hbar \sqrt{j(j + 1) - m(m + 1)}} \quad (7.26)$$

Del mismo modo, si escribimos

$$\begin{aligned} J_- |j, m\rangle &= D(j, m) |j, m - 1\rangle, \\ \langle j, m | J_+ &= D^*(j, m) \langle j, m - 1 |, \end{aligned} \quad (7.27)$$

y tomamos el producto, llegamos a:

$$\begin{aligned} |D(j, m)|^2 &= \langle j, m | J_+ J_- | j, m \rangle = \langle j, m | (J^2 - J_3^2 + \hbar J_3) | j, m \rangle = \\ &= \hbar^2 [j(j+1) - m(m-1)] . \end{aligned} \quad (7.28)$$

Tomando la raíz cuadrada de esta expresión, obtenemos:

$$\boxed{D(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \quad (7.29)$$

Por lo tanto,  $J_{\pm}$  actúa sobre los vectores  $|j, m\rangle$  en la forma:

$$\boxed{J_{\pm} |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} |j, m \pm 1\rangle} \quad (7.30)$$

Observemos que, como debería de ser,  $J_+$  da cero cuando actúa sobre el estado  $|j, j\rangle$  y  $J_-$  da cero cuando actúa sobre  $|j, -j\rangle$ .

Pasemos ahora a escribir los elementos de matriz de  $J^2$ ,  $J_3$  y  $J_{\pm}$  en la base  $\{|j, m\rangle\}$ :

$$\begin{aligned} \langle j', m' | J^2 | j, m \rangle &= j(j+1) \hbar^2 \delta_{j'j} \delta_{m'm} , \\ \langle j', m' | J_3 | j, m \rangle &= m \hbar \delta_{j'j} \delta_{m'm} , \\ \langle j', m' | J_{\pm} | j, m \rangle &= \hbar \sqrt{j(j+1) - m m'} \delta_{j'j} \delta_{m' m \pm 1} \end{aligned}$$

A partir de esta última relación, los elementos de matriz de  $J_1$  y  $J_2$  se obtienen utilizando su relación con los operadores  $J_{\pm}$ :

$$J_1 = \frac{1}{2} (J_+ + J_-) , \quad J_2 = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-) . \quad (7.31)$$

En conclusión, hemos obtenido una representación de las componentes del operador momento angular como matrices  $(2j+1) \times (2j+1)$ , siendo el momento angular  $j$  un número entero o semientero. Es interesante destacar que para obtener esta representación solo hemos tenido que utilizar las relaciones de conmutación entre las diferentes componentes del momento angular y no hemos necesitado usar la forma explícita de los operadores. Por esta razón los resultados obtenidos son válidos para representar el momento angular orbital, de espín o el momento angular total. Como veremos, la única diferencia entre estos casos es que el momento angular orbital es siempre entero y no puede ser semientero, al contrario de lo que sucede con el espín o el momento angular total que sí pueden ser semienteros.

## 8 Espin 1/2

Vamos a aplicar el formalismo general obtenido mas arriba para encontrar la representacion de los operadores de espin de las particulas de espin 1/2. Para ello hemos de tomar  $j = 1/2$  en nuestras ecuaciones anteriores. De hecho es costumbre denotar el espin por la letra  $s$ , por lo que cambiaremos nuestra notacion de la forma siguiente:

$$J_i \rightarrow S_i, \quad j \rightarrow s, \quad m \rightarrow s_3. \quad (8.1)$$

Si  $s = 1/2$  los dos posibles valores de  $s_3$  son  $s_3 = \pm 1/2$  y los vectores de nuestra base de estados son:

$$|s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}\rangle \equiv |+\rangle, \quad |s = \frac{1}{2}, s_3 = -\frac{1}{2}\rangle \equiv |-\rangle. \quad (8.2)$$

La tercera componente del espin  $S_3$  actua como:

$$S_3 |+\rangle = \frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad S_3 |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle. \quad (8.3)$$

Por lo tanto, en la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  el operador  $S_3$  tiene la siguiente representacion matricial:

$$S_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_3. \quad (8.4)$$

Obtengamos ahora la representacion de  $S_{\pm}$  en esta base utilizando (7.30). Dado que  $s(s+1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{4}$ , tenemos:

$$S_{\pm} |\frac{1}{2}, s_3\rangle = \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - s_3(s_3 \pm 1)} |\frac{1}{2}, s_3 \pm 1\rangle. \quad (8.5)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} S_+ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1\rangle = 0, \\ S_+ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}+1)} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \end{aligned} \quad (8.6)$$

es decir

$$S_+ |+\rangle = 0, \quad S_+ |-\rangle = \hbar |+\rangle, \quad (8.7)$$

cuya representacion matricial es:

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

De forma similar, tenemos:

$$\begin{aligned} S_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 1 \right\rangle = \hbar \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ S_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \hbar \sqrt{\frac{3}{4} - \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2} - 1 \right)} \left| \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (8.9)$$

es decir:

$$S_- |+\rangle = \hbar |-\rangle, \quad S_- |-\rangle = 0, \quad (8.10)$$

que puede representarse matricialmente como:

$$S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Observemos que  $S_- = S_+^\dagger$ . A partir de  $S_\pm$  podemos obtener  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} (S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_1, \\ S_2 &= \frac{1}{2i} (S_+ - S_-) = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

En conclusion, los operadores correspondiente al momento angular intrinseco de una partícula de espín 1/2 se pueden representar en terminos de las matrices de Pauli:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}} \quad (8.13)$$

Este es un resultado que ya habiamos obtenido por otros metodos en un tema anterior.

En la representacion de posicion la funcion de onda correspondiente a los dos estados de una partícula de espín 1/2 es:

$$\langle \vec{r} | \pm \rangle \equiv \psi_\pm(\vec{r}). \quad (8.14)$$

Podemos representar  $\psi_\pm(\vec{r})$  como las dos componentes de una unica funcion de onda:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (8.15)$$

Una funcion de onda de dos componentes de este tipo se llama **espinor**. Las componentes  $\psi_\pm(\vec{r})$  del espinor se interpretan como las amplitudes de probabilidad de que la partícula este en la posicion  $\vec{r}$  y tenga un valor  $\pm\hbar/2$  de la tercera componente del espín. La condicion de normalizacion del espinor  $\psi(x)$  es:

$$\int d^3\vec{r} \left[ |\psi_+(\vec{r})|^2 + |\psi_-(\vec{r})|^2 \right] = 1, \quad (8.16)$$

o, lo que es lo mismo:

$$\int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = 1, \quad (8.17)$$

siendo  $\psi^\dagger(\vec{r}) = (\psi_+^*(\vec{r}), \psi_-^*(\vec{r}))$  el espinor hermitico conjugado.

## 9 Espin 1

Para obtener la representacion de los operadores de espin para una particula de espin 1, pongamos  $j = 1$  en nuestras formulas generales y consideremos la siguiente base de vectores:

$$\{|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle\}. \quad (9.1)$$

Estos vectores satisfacen:

$$S_3 |1, m\rangle = m\hbar |1, m\rangle, \quad m = 1, 0, -1. \quad (9.2)$$

Por otra parte, los elementos de matriz de  $S_\pm = S_1 \pm S_2$  son:

$$\langle 1, m' | S_\pm | 1, m \rangle = \hbar \sqrt{2 - m m'} \delta_{m', m \pm 1}. \quad (9.3)$$

Explicitamente:

$$\begin{aligned} \langle 1, m | S_+ | 1, 1 \rangle &= 0 \implies S_+ |1, 1\rangle = 0, \\ \langle 1, m | S_+ | 1, 0 \rangle &= \sqrt{2} \hbar \delta_{m, 1} \implies S_+ |1, 0\rangle = \sqrt{2} \hbar |1, 1\rangle, \\ \langle 1, m | S_+ | 1, -1 \rangle &= \sqrt{2} \hbar \delta_{m, 0} \implies S_+ |1, -1\rangle = \sqrt{2} \hbar |1, 0\rangle. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Se sigue entonces que la representacion matricial de  $S_+$  en la base (9.1) es:

$$S_+ = \sqrt{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

Teniendo en cuenta que  $S_- = S_+^\dagger$ , obtenemos la siguiente representacion matricial de  $S_-$ :

$$S_- = \sqrt{2} \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

A partir de estos resultados en inmediato obtener las matrices correspondientes a  $S_1 = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ ,  $S_2 = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$  y  $S_3$ :

$$S_1 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.7)$$

Estas matrices son una representacion de los generadores del grupo de rotaciones en un espacio vectorial de tres dimensiones. Es natural preguntarse si dicha representacion esta relacionada con la obtenida en (1.5) en terminos de las matrices  $T_i$  (que actuan sobre las coordenadas espaciales). Para establecer esta relacion hagamos un cambio de base en el espacio de Hilbert de estados. Los vectores  $|v_1\rangle$ ,  $|v_2\rangle$  y  $|v_3\rangle$  de la nueva base ortonormal estan relacionados con los vectores de (9.1) en la forma:

$$|1, \pm 1\rangle = \mp \frac{|v_1\rangle \pm i|v_2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |1, 0\rangle = |v_3\rangle. \quad (9.8)$$

Esta relacion puede invertirse facilmente:

$$|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle, \quad |v_2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle, \quad |v_3\rangle = |1, 0\rangle. \quad (9.9)$$

Mediante un calculo sencillo utilizando (9.7) y (9.9). puede comprobarse que los elementos de matriz de los operadores de espin en la base  $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$  son:

$$(S_i)_{jk} \equiv \langle v_j | S_i | v_k \rangle = -i\hbar \epsilon_{ijk}. \quad (9.10)$$

Por lo tanto, en esta base  $\{|v_i\rangle\}$  los operadores de espin 1 estan representados por las matrices  $\hbar T_i$  escritas en (1.5) (vease (1.12)), lo que significa que **los vectores de estado de las particulas de espin 1 se transforman bajo rotaciones como los vectores de posicion en el espacio  $\mathbb{R}^3$** . Por esta razon las particulas que tienen espin 1 se denominan **particulas vectoriales**. El foton (la particula que media la interaccion electromagnetica) es un ejemplo de particula vectorial.

## 10 Matrices de rotacion

Como hemos visto, bajo una rotacion  $R$  un estado  $|\psi\rangle$  se transforma en el estado  $|\psi\rangle_R$ , relacionado con  $|\psi\rangle$  a traves del operador unitario  $U(R)$ :

$$|\psi\rangle_R = U(R) |\psi\rangle. \quad (10.1)$$

Tambien hemos visto que el operador de rotacion puede expresarse como una exponencial de los generadores infinitesimales  $J_i$ . Asi para una rotacion de angulo  $\alpha$  alrededor del eje  $\vec{n}$ , el operador  $U(R)$  es:

$$U(R) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{J} \cdot \vec{n} \right]. \quad (10.2)$$

Vamos ahora a encontrar la forma matricial de  $U(R)$  en la base  $\{|j, m\rangle\}$ . Dado que  $[J^2, J_i] = 0$ , se tiene que  $[U(R), J^2] = 0$  y, por consiguiente, los elementos de matriz de  $U(R)$  son diagonales en  $j$ :

$$\langle j', m' | U(R) | j, m \rangle \propto \delta_{j'j}. \quad (10.3)$$

Para cada  $j$  el operador  $U(R)$  se puede representar como una matriz  $(2j+1) \times (2j+1)$ , que denotaremos como  $D^{(j)}(R)$ , cuyos elementos de matriz son:

$$\boxed{D_{m'm}^{(j)}(R) \equiv \langle j, m' | U(R) | j, m \rangle} \quad (10.4)$$

Las matrices  $D^{(j)}$  se denominan **matrices de rotacion** o **matrices de Wigner**.

Estudiemos en detalle la transformacion de los estados de la base. Introduciendo la resolucion de la unidad, obtenemos:

$$|j, m\rangle_R = U(R) |j, m\rangle = \sum_{m'} |j, m'\rangle \langle j, m' | U(R) | j, m \rangle . \quad (10.5)$$

Es decir:

$$\boxed{|j, m\rangle_R = \sum_{m'} D_{m'm}^{(j)}(R) |j, m'\rangle} \quad (10.6)$$

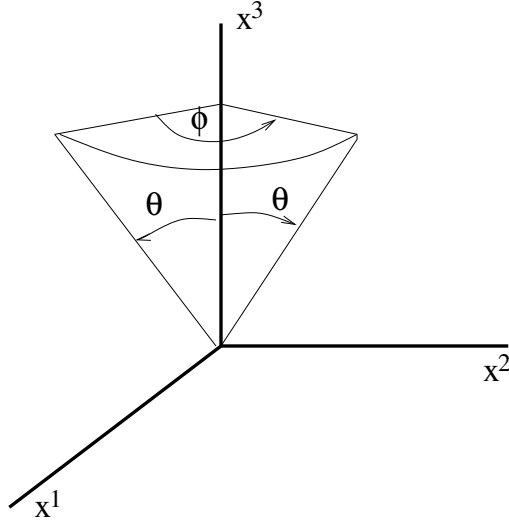


Figure 3: Mediante dos rotaciones,  $R_{x^2}(\theta)$  seguida de  $R_{x^3}(\phi)$ , se puede alinear el eje  $x^3$  con el vector  $\vec{n}$ .

Sea  $\vec{n}$  un vector unitario en el espacio de posiciones. Representemos  $\vec{n}$  en coordenadas esfericas, en terminos de dos angulos  $\theta$  y  $\phi$ :

$$n_1 = \text{sen } \theta \cos \phi , \quad n_2 = \text{sen } \theta \text{sen } \phi , \quad n_3 = \cos \theta . \quad (10.7)$$

Consideremos la rotacion que alinea el eje  $x^3$  con el vector  $\vec{n}$ . Tal como se muestra en la figura 3, esto se puede conseguir por medio de una rotacion de angulo  $\theta$  a lo largo del eje  $x^2$ , seguida por una rotacion de angulo  $\phi$  en torno al eje  $x^3$ . Denotemos por  $R(\theta, \phi)$  al producto de estas rotaciones:

$$R(\theta, \phi) = R_{x^3}(\phi) R_{x^2}(\theta) . \quad (10.8)$$

El operador unitario correspondiente es:

$$U(R(\theta, \phi)) = e^{-\frac{i}{\hbar}\phi J_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} . \quad (10.9)$$

Denotemos por  $D_{m'm}^{(j)}(\theta, \phi)$  a los elementos de matriz de este operador de rotacion:

$$D_{m'm}^{(j)}(\theta, \phi) = \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar}\phi J_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} | j, m \rangle . \quad (10.10)$$

Dado que  $J_3$  es diagonal en la base  $\{|j, m\rangle\}$  ( $J_3 |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$ ), tenemos:

$$D_{m'm}^{(j)}(\theta, \phi) = e^{-im'\phi} \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} | j, m \rangle . \quad (10.11)$$

Si definimos:

$$d_{m'm}^{(j)}(\theta) \equiv \langle j, m' | e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} | j, m \rangle \quad (10.12)$$

entonces, los elementos de matriz del operador de rotacion son:

$$D_{m'm}^{(j)}(\theta, \phi) = e^{-im'\phi} d_{m'm}^{(j)}(\theta) \quad (10.13)$$

Apliquemos este formalismo al caso  $j = 1/2$ , en el cual  $J_2 = \frac{\hbar}{2} \sigma_2$  y, por lo tanto,  $-\frac{i}{\hbar}\theta J_2 = -\frac{i\theta}{2} \sigma_2$ . En este caso:

$$d^{(\frac{1}{2})}(\theta) = e^{-\frac{i\theta}{2} \sigma_2} . \quad (10.14)$$

Recordemos que, si  $\vec{n}$  es un vector unitario, se tiene:

$$e^{-\frac{i\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{\alpha}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} . \quad (10.15)$$

Aplicando esta formula general, obtenemos:

$$d^{(\frac{1}{2})}(\theta) = \cos \frac{\theta}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} . \quad (10.16)$$

Entonces:

$$D^{(\frac{1}{2})}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} . \quad (10.17)$$

Es decir:

$$D^{(\frac{1}{2})}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} \cos \frac{\theta}{2} & -e^{-\frac{i}{2}\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}\phi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} & e^{\frac{i}{2}\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (10.18)$$

Esta es la matriz de rotacion para un espinor, que ya habiamos obtenido en nuestra discusion del espin empleando otros metodos. Como ya indicamos, una rotacion de angulo  $2\pi$  (con  $\theta = 0$  y  $\phi = 2\pi$ ) tiene una matriz  $D^{(\frac{1}{2})}(0, 2\pi) = -I$ , en la que todo estado  $|\psi\rangle$  es aplicado al estado  $-|\psi\rangle$ . Esto sucede porque, sobre los espinores, las rotaciones espaciales se realizan como el grupo  $SU(2)$ , que es el doble recubrimiento del grupo  $SO(3)$ . Este ultimo grupo realiza las rotaciones sobre las coordenadas espaciales.

## 11 Momento angular orbital

Vamos a encontrar la representacion del operador momento angular orbital  $\vec{L}$  como operador diferencial en el espacio de posiciones. Sabemos que los autovectores  $|l, m\rangle$  de  $\vec{L}$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L^2 |l, m\rangle &= l(l+1) \hbar^2 |l, m\rangle , \\ L_3 |l, m\rangle &= m \hbar |l, m\rangle . \end{aligned} \quad (11.1)$$

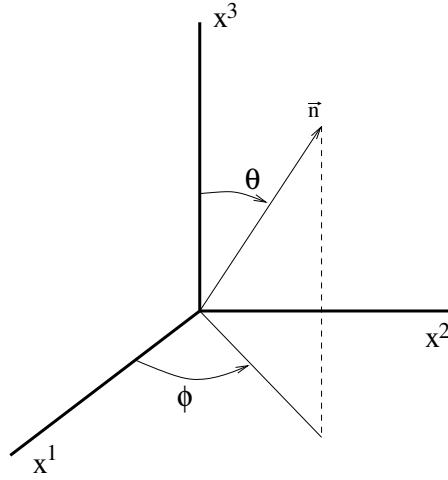


Figure 4: El sistema de coordenadas esféricas.

Para obtener las autofunciones  $\psi_{j,m}(\vec{r}) = \langle \vec{r} | l, m \rangle$  es muy conveniente trabajar en coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ , que se muestran en la figura 4. El vector de posición  $\vec{r}$  en dicho sistema de coordenadas esta dado por:

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + r \cos \theta \vec{e}_3 , \quad (11.2)$$

y los vectores unitarios tangentes a las líneas coordenadas son:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 , \\ \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3 , \\ \vec{e}_\phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2 . \end{aligned} \quad (11.3)$$

El operador gradiente se expresa en estas coordenadas como:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (11.4)$$

A partir de esta expresion es facil obtener la expresion del operador  $\vec{L} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$  en terminos de las derivadas con respecto a  $(r, \theta, \phi)$ . Teniendo en cuenta que  $\vec{r} = r \vec{e}_r$ , tenemos:

$$\vec{L} = -i\hbar r \vec{e}_r \times \vec{\nabla} . \quad (11.5)$$

Si tenemos en cuenta que  $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$  y que:

$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\phi , \quad \vec{e}_r \times \vec{e}_\phi = -\vec{e}_\theta , \quad (11.6)$$

tal como se puede demostrar facilmente a partir de (11.3), obtenemos:

$$\vec{L} = -i\hbar \left( \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\vec{e}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) . \quad (11.7)$$

Substituyendo en esta ultima expresion los valores de  $\vec{e}_\theta$  y  $\vec{e}_\phi$  de (11.3), llegamos a la siguiente representacion de  $\vec{L}$  como operador diferencial:

$$\begin{aligned} \vec{L} = & -i\hbar \left( -\sin \phi \vec{e}_1 + \cos \phi \vec{e}_2 \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \\ & + \frac{i\hbar}{\sin \theta} \left( \cos \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_2 - \sin \theta \vec{e}_3 \right) \frac{\partial}{\partial \phi} . \end{aligned} \quad (11.8)$$

Para obtener la representacion de  $L_1, L_2$  y  $L_3$  basta recordar que son las componentes del operador  $\vec{L}$  respecto a  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ :

$$\vec{L} = L_1 \vec{e}_1 + L_2 \vec{e}_2 + L_3 \vec{e}_3 . \quad (11.9)$$

Estas componentes se leen directamente de (11.8):

$$\begin{aligned} L_1 &= i\hbar \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \\ L_2 &= i\hbar \left( -\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) , \\ L_3 &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Vamos ahora a deducir de nuevo esta representacion de  $L_1, L_2$  y  $L_3$  utilizando el hecho de que son los generadores de las rotaciones a lo largo de los ejes. Sea  $\vec{n} = \vec{r}/r$ . En terminos de los angulos  $(\theta, \phi)$ :

$$\vec{n} = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3 . \quad (11.10)$$

En estas coordenadas la funcion de onda es de la forma  $\psi(r, \theta, \phi)$ . La rotacion de angulo  $\delta\alpha$  a lo largo del eje  $x^3$  es un cambio de  $\phi$  del tipo  $\phi \rightarrow \phi + \delta\alpha$ , cuya inversa es  $\phi \rightarrow \phi - \delta\alpha$ . Por consiguiente, sobre los estados el operador de rotacion actua como:

$$U_{\vec{e}_3}(\delta\alpha) \psi(r, \theta, \phi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \delta\alpha L_3} \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi - \delta\alpha) . \quad (11.11)$$

Supongamos que  $\delta\alpha$  es pequeño y hagamos la expansion en serie de Taylor:

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\alpha L_3\right) \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi) - \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \delta\alpha . \quad (11.12)$$

Igualando los terminos proporcionales a  $\delta\alpha$ , obtenemos:

$$-\frac{i}{\hbar} L_3 \psi = -\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \quad \Longrightarrow \quad L_3 \psi = -i \hbar \frac{\partial\psi}{\partial\phi} , \quad (11.13)$$

que coincide con la expresion de  $L_3$  obtenida mas arriba. Para encontrar la expresion de  $L_1$  hagamos una rotacion de angulo  $\delta\alpha$  alrededor del eje  $x^1$ , bajo la cual  $\theta$  y  $\phi$  cambian como:

$$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta , \quad \phi \rightarrow \phi + \delta\phi . \quad (11.14)$$

Tenemos que encontrar la relacion entre  $\delta\theta$  y  $\delta\phi$  con  $\delta\alpha$ . Para ello observemos que la componente  $n_2$  de  $\vec{n}$  a lo largo de  $\vec{e}_2$  cambia como:

$$\begin{aligned} n_2 &\rightarrow \sin(\theta + \delta\theta) \sin(\phi + \delta\phi) \approx (\sin\theta + \cos\theta \delta\theta) (\sin\phi + \cos\phi \delta\phi) \approx \\ &\approx \sin\theta \sin\phi + \cos\theta \sin\phi \delta\theta + \sin\theta \cos\phi \delta\phi . \end{aligned} \quad (11.15)$$

De forma similar  $n_3$  cambia como:

$$n_3 \rightarrow \cos(\theta + \delta\theta) \approx \cos\theta - \sin\theta \delta\theta . \quad (11.16)$$

En una rotacion de angulo  $\delta\alpha$  a lo largo del eje  $x^1$  la componente  $n_1$  de  $\vec{n}$  no cambia y  $(n_2, n_3)$  cambian como:

$$\begin{pmatrix} n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta\alpha & -\sin\delta\alpha \\ \sin\delta\alpha & \cos\delta\alpha \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -\delta\alpha \\ \delta\alpha & 1 \end{pmatrix} . \quad (11.17)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta n_2 &= -\delta\alpha n_3 = -\cos\theta \delta\alpha , \\ \delta n_3 &= \delta\alpha n_2 = \sin\theta \sin\phi \delta\alpha . \end{aligned} \quad (11.18)$$

Comparando esta ultima ecuacion con (11.15) y (11.16) tenemos dos expresiones relacionando  $(\delta\theta, \delta\phi)$  con  $\delta\alpha$ :

$$\begin{aligned} \cos\theta \operatorname{sen}\phi \delta\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\phi \delta\phi &= -\cos\theta \delta\alpha, \\ -\operatorname{sen}\theta \delta\theta &= \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \delta\alpha. \end{aligned} \quad (11.19)$$

De la segunda las ecuaciones (11.19) obtenemos:

$$\delta\theta = -\operatorname{sen}\phi \delta\alpha, \quad (11.20)$$

y substituyendo este resultado en la primera ecuacion en (11.19) llegamos a:

$$\cos\theta \operatorname{sen}\phi (-\operatorname{sen}\phi \delta\alpha) + \operatorname{sen}\theta \cos\phi \delta\phi = -\cos\theta \delta\alpha, \quad (11.21)$$

que puede reescribirse como:

$$\operatorname{sen}\theta \cos\phi \delta\phi = (-\cos\theta + \cos\theta \operatorname{sen}^2\phi) \delta\alpha = -\cos\theta \cos^2\phi \delta\alpha. \quad (11.22)$$

A partir de esta ultima ecuacion podemos despejar  $\delta\phi$ :

$$\delta\phi = -\cot\theta \cos\phi \delta\alpha. \quad (11.23)$$

Como comprobacion de las variaciones (11.20) y (11.23) se puede verificar que la componente  $n_1$  de  $\vec{n}$  no cambia. Utilizando estos resultados ya podemos obtener la expresion de  $L_1$ . En primer lugar escribamos:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\alpha L_1} \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta - \delta\theta, \phi - \delta\phi), \quad (11.24)$$

y desarrollemos en serie de Taylor ambos miembros de esta ecuacion:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{i}{\hbar}\delta\alpha L_1\right) \psi(r, \theta, \phi) &= \psi(r, \theta, \phi) - \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \delta\theta - \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \delta\phi = \\ &= \psi(r, \theta, \phi) + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \operatorname{sen}\phi \delta\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \cot\theta \cos\phi \delta\alpha. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Igualando los terminos proporcionales a  $\delta\alpha$  de ambos miembros llegamos a:

$$-\frac{i}{\hbar} L_1 \psi(r, \theta, \phi) = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \operatorname{sen}\phi + \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \cot\theta \cos\phi, \quad (11.26)$$

que es equivalente a la expresion de  $L_1$  obtenida mas arriba. Claramente, podriamos repetir el analisis para una rotacion alrededor del eje  $x^2$ . El resultado coincide, de nuevo, con el que se obtiene por medio del calculo directo.

Obtenemos ahora las expresiones de los operadores escalera  $L_{\pm} = L_1 \pm iL_2$ . En primer lugar obtenemos  $L_+$ :

$$\begin{aligned} L_+ &= L_1 + iL_2 = i\hbar \left[ (\sin \phi - i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta (\cos \phi + i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] = \\ &= \hbar e^{i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right], \end{aligned} \quad (11.27)$$

y de manera similar para  $L_-$ :

$$\begin{aligned} L_- &= L_1 - iL_2 = i\hbar \left[ (\sin \phi + i \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] = \\ &= \hbar e^{-i\phi} \left[ -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]. \end{aligned} \quad (11.28)$$

En conclusion, tenemos:

$$\boxed{L_{\pm} = \hbar e^{\pm i\phi} \left[ \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right]} \quad (11.29)$$

A continuacion, vamos a obtener la expresion del operador  $L^2$ . En primer lugar utilizamos la relacion:

$$L^2 = \frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+) + L_3^2. \quad (11.30)$$

El ultimo termino en (11.30) actua sobre  $\psi$  como:

$$L_3^2 \psi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}. \quad (11.31)$$

Por otra parte,  $L_+ L_-$  actua sobre la funcion de onda como:

$$L_+ L_- \psi = \hbar^2 e^{i\phi} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[ e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right]. \quad (11.32)$$

Calculemos las dos derivadas separadamente. Empecemos por la derivada con respecto a  $\theta$ :

$$\partial_{\theta} \left[ e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] = e^{-i\phi} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + i(\cot \theta)' \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi} \right], \quad (11.33)$$

y sigamos por la derivada con respecto a  $\phi$ :

$$\begin{aligned} &i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] = \\ &= \cot \theta e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + \cot \theta e^{-i\phi} \left( -i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi \partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right). \end{aligned} \quad (11.34)$$

Sumando estas dos ultimas expresiones obtenemos:

$$L_+ L_- \psi = \hbar^2 \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + i(\cot \theta)' \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + i(\cot \theta)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - (\cot \theta)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]. \quad (11.35)$$

De la misma forma evaluamos  $L_- L_+ \psi$ :

$$L_- L_+ \psi = \hbar^2 e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left[ e^{i\phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right]. \quad (11.36)$$

Calculemos de nuevo los dos terminos. El primero de ellos es:

$$-\partial_\theta \left[ e^{i\phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] = e^{i\phi} \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - i(\cot \theta)' \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - i \cot \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi} \right], \quad (11.37)$$

y el segundo es:

$$i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \left[ e^{i\phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] = \\ = i \cot \theta e^{i\phi} \left[ i \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \phi} + i \cot \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]. \quad (11.38)$$

Entonces, sumando estos dos ultimos resultados llegamos a:

$$L_- L_+ \psi = \hbar^2 \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - i(\cot \theta)' \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \right. \\ \left. - i(\cot \theta)^2 \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - (\cot \theta)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]. \quad (11.39)$$

Calculemos ahora  $(L_+ L_- + L_- L_+) \psi$  sumando (11.35) y (11.39). En esta suma los terminos imaginarios se cancelan y solo quedan los terminos reales:

$$\frac{1}{2} (L_+ L_- + L_- L_+) \psi = \hbar^2 \left[ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - (\cot \theta)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] = \\ = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \cot^2 \theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]. \quad (11.40)$$

Entonces, despues de sumar el resultado obtenido en (11.31), se tiene:

$$-\frac{1}{\hbar^2} L^2 \psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + (\cot^2 \theta + 1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}, \quad (11.41)$$

que, despues de simplificar, se reduce a:

$$\boxed{L^2 \psi = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen } \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right]} \quad (11.42)$$

Observamos que, aparte un factor  $-\hbar^2$ , el operador  $L^2$  coincide con la parte angular del operador laplaciano en  $\mathbb{R}^3$  ( $\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 = \sum_i \partial_i^2$ ). De hecho, si ponemos:

$$L^2 = -\hbar^2 \nabla_{\mathbb{S}^2}^2, \quad (11.43)$$

siendo  $\nabla_{\mathbb{S}^2}^2$  el laplaciano en la dos-esfera  $\mathbb{S}^2$  (cuya expresion puede leerse de la que hemos obtenido para  $L^2$ ), entonces para toda funcion  $\psi(\vec{r})$  tenemos:

$$\nabla_{\mathbb{R}^3}^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2} \nabla_{\mathbb{S}^2}^2 \psi. \quad (11.44)$$

## 12 Armonicos esfericos

Pasemos a calcular las autofunciones de  $L^2$  y  $L_3$  en la representacion de posicion. Sea  $\vec{n} = \vec{r}/r$  el vector unitario en la direccion del vector de posicion escrito en (11.10). Claramente  $\vec{n}$  depende solo de los angulos  $(\theta, \phi)$ . Definamos ahora las funciones

$$\boxed{Y_l^m(\theta, \phi) \equiv \langle \vec{n} | l, m \rangle} \quad (12.1)$$

que se denominan **armonicos esfericos**. Estas funciones satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} L^2 Y_l^m(\theta, \phi) &= l(l+1) \hbar^2 Y_l^m(\theta, \phi), \\ L_3 Y_l^m(\theta, \phi) &= m \hbar Y_l^m(\theta, \phi), \end{aligned} \quad (12.2)$$

que, una vez que se usa la representacion de  $L^2$  y  $L_3$  como operadores diferenciales son ecuaciones en derivadas parciales para las funciones  $Y_l^m(\theta, \phi)$ . La ecuacion de  $L^2$  es:

$$\boxed{\frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen } \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y_l^m = 0} \quad (12.3)$$

De forma mas compacta:

$$\boxed{\nabla_{\mathbb{S}^2}^2 Y_l^m + l(l+1) Y_l^m = 0} \quad (12.4)$$

La ecuacion para  $L_3$  es:

$$\boxed{\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} = im Y_l^m} \quad (12.5)$$

Esta ultima ecuacion puede integrarse como:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = e^{im\phi} f_l^m(\theta) , \quad (12.6)$$

siendo  $f_l^m(\theta)$  una funcion a determinar del angulo polar  $\theta$ . Impongamos ahora que  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sea univaluada en la esfera unidad de  $\mathbb{R}^3$ . Esta condicion se obtiene del hecho que la direccion correspondiente a los angulos  $(\theta, \phi)$  es la misma que la que tiene por angulos  $(\theta, \phi + 2\pi)$ . En consecuencia debemos de requerir que:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi + 2\pi) , \quad (12.7)$$

lo que implica que:

$$e^{2\pi im} = 1 \quad \implies \quad \boxed{m \in \mathbb{Z}} \quad (12.8)$$

Observemos que esto implica que:

$$\boxed{l \in \mathbb{Z}} \quad (12.9)$$

puesto que  $m$  toma valores entre  $-l$  y  $+l$  en pasos de una unidad. Por lo tanto concluimos que **el momento angular orbital es siempre entero**. Esto es una gran diferencia con el momento angular de espín  $\vec{S}$  que, al no actuar sobre las coordenadas espaciales puede ser entero o semientero, tal como vimos cuando estudiamos la representacion de algebra del momento angular.

Para determinar completamente los armonicos esfericos tenemos que determinar la funcion  $f_l^m(\theta)$ . Podriamos hacerlo resolviendo la ecuacion diferencial de autovalores de  $L^2$ . En lugar de hacer esto vamos a utilizar lo que ya conocemos sobre los autovectores del momento angular. En particular sabemos que:

$$L_+ |l, l\rangle = 0 , \quad (12.10)$$

que, teniendo en cuenta (11.29), es equivalente a la ecuacion diferencial:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l^l(\theta, \phi) = 0 . \quad (12.11)$$

Puesto que  $Y_l^l(\theta, \phi) = e^{il\phi} f_l^l(\theta)$ , tenemos:

$$\frac{d}{d\theta} f_l^l(\theta) - l \cot \theta f_l^l(\theta) = 0 . \quad (12.12)$$

Esta ecuacion puede resolverse facilmente por separacion de variables. En primer lugar la escribimos como:

$$\frac{1}{f_l^l(\theta)} \frac{df_l^l(\theta)}{d\theta} = l \cot \theta = l \frac{d}{d\theta} \log \text{sen } \theta , \quad (12.13)$$

cuya integral es:

$$\log f_l^l(\theta) = l \log \text{sen } \theta + \text{constante} \quad \Longrightarrow \quad f_l^l(\theta) = C_l (\text{sen } \theta)^l, \quad (12.14)$$

siendo  $C_l$  una constante. Entonces:

$$Y_l^l(\theta, \phi) = C_l e^{il\phi} (\text{sen } \theta)^l. \quad (12.15)$$

La condicion de normalizacion de los armonicos esfericos es:

$$\int_0^\pi d\theta \text{sen } \theta \int_0^{2\pi} d\phi \left| Y_l^m(\theta, \phi) \right|^2 = 1. \quad (12.16)$$

En particular, si  $m = l$  esta ecuacion implica:

$$\int_0^\pi d\theta \text{sen } \theta \int_0^{2\pi} d\phi |C_l|^2 (\text{sen } \theta)^{2l} = 1, \quad (12.17)$$

que permite obtener  $|C_l|^2$ :

$$|C_l|^{-2} = 2\pi \int_0^{2\pi} d\theta (\text{sen } \theta)^{2l+1} = 2\pi \frac{(l!)^2 2^{2l+1}}{(2l+1)!}. \quad (12.18)$$

Entonces, escogiendo  $C_l \in \mathbb{R}$ :

$$C_l = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!}, \quad (12.19)$$

donde el signo  $(-1)^l$  es convencional. Asi pues, tenemos:

$$\boxed{Y_l^l(\theta, \phi) = (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{1}{2^l l!} (\text{sen } \theta)^l e^{il\phi}} \quad (12.20)$$

Para  $l = 0, 1$  esta ecuacion da:

$$\boxed{Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}} \quad \boxed{Y_1^1(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen } \theta e^{il\phi}} \quad (12.21)$$

Podemos obtener armonicos con otros valores de  $m$  actuando con  $L_-$ . En efecto, segun (7.30) tenemos:

$$L_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} |l, m-1\rangle. \quad (12.22)$$

Esta ecuacion, en particular, implica que:

$$|l, l-1\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2l}} L_- |l, l\rangle, \quad |l, l-2\rangle = \frac{1}{\hbar\sqrt{2(2l-1)}} L_- |l, l-1\rangle. \quad (12.23)$$

La primera de estas formulas es equivalente a:

$$Y_l^{l-1}(\theta, \phi) = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2l}} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) Y_l^l(\theta, \phi) . \quad (12.24)$$

Podemos evaluar las derivadas que aparecen en esta ultima ecuacion a partir de la expresion explicita de  $Y_l^l(\theta, \phi)$  en (12.20):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\theta} Y_l^l(\theta, \phi) &= -C_l l \cos\theta (\sin\theta)^{l-1} e^{il\phi} , \\ i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} Y_l^l(\theta, \phi) &= -C_l l \cot\theta (\sin\theta)^l e^{il\phi} = -C_l l \cos\theta (\sin\theta)^{l-1} e^{il\phi} . \end{aligned} \quad (12.25)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{Y_l^{l-1}(\theta, \phi) = -\sqrt{2l} (-1)^l \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{\cos\theta (\sin\theta)^{(l-1)}}{2^l l!} e^{i(l-1)\phi}} \quad (12.26)$$

En particular, para  $l = 1$  esta ecuacion da:

$$Y_1^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta . \quad (12.27)$$

De la misma forma  $Y_l^{l-2}$  esta dado por:

$$Y_l^{l-2}(\theta, \phi) = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2(2l-1)}} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) Y_l^{l-1}(\theta, \phi) . \quad (12.28)$$

Calculemos las derivadas que aparecen en esta expresion teniendo en cuenta (12.26). La derivada respecto de  $\theta$  que tenemos que calcular es:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial\theta} \left[ \cos\theta (\sin\theta)^{l-1} e^{i(l-1)\phi} \right] &= -e^{i(l-1)\phi} \left[ -\sin\theta (\sin\theta)^{l-1} + (l-1) \cos^2\theta (\sin\theta)^{l-2} \right] = \\ &= -e^{i(l-1)\phi} (\sin\theta)^{l-2} \left( -\sin^2\theta + (l-1) \cos^2\theta \right) , \end{aligned} \quad (12.29)$$

mientras que la derivada respecto del angulo  $\phi$  es:

$$i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \left[ \cos\theta (\sin\theta)^{l-1} e^{i(l-1)\phi} \right] = -(l-1) (\sin\theta)^{l-2} \cos^2\theta e^{i(l-1)\phi} . \quad (12.30)$$

Entonces, tenemos:

$$\begin{aligned} \left( -\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \left( \cos\theta (\sin\theta)^{(l-1)} e^{i(l-1)\phi} \right) &= e^{i(l-1)\phi} (\sin\theta)^{l-2} \left( \sin^2\theta - (2l-2) \cos^2\theta \right) = \\ &= e^{i(l-1)\phi} (\sin\theta)^{l-2} \left( 1 - (2l-1) \cos^2\theta \right) , \end{aligned} \quad (12.31)$$

y la funcion  $Y_l^{l-2}$  es:

$$Y_l^{l-2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{l}{2l-1}} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \frac{e^{i(l-2)\phi}}{2^l l!} (-1)^l (\text{sen } \theta)^{l-2} \left[ (2l-1) \cos^2 \theta - 1 \right] \quad (12.32)$$

Haciendo  $l = 1$  en la ecuacion anterior, obtenemos:

$$Y_1^{-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \text{sen } \theta \quad (12.33)$$

Los armonicos esfericos con  $l = 1$  y  $m = -1, 0, +1$  pueden ponerse en terminos del vector unitario radial  $\vec{n} = \vec{r}/r$ . En efecto, comparando (11.10) con las funciones  $Y_{l=1}^m$  que acabamos de obtener, llegamos a:

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} n_3 \quad Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{n_1 \pm in_2}{\sqrt{2}} \quad (12.34)$$

Esto quiere decir que las funciones de onda de momento angular orbital  $l = 1$  se transforman bajo rotaciones espaciales como un vector.

Mediante el uso de los operadores escalera se puede encontrar la expresion general de los armonicos esfericos. Para  $m \geq 0$  se tiene:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi} \frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}} \times \\ \times e^{im\phi} (\text{sen } \theta)^{-m} \frac{d^{l-m}}{d(\cos \theta)^{l-m}} (\text{sen } \theta)^{2l}, \quad (m \geq 0) \quad (12.35)$$

Para  $m < 0$  se utiliza la relacion:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ Y_l^{-m}(\theta, \phi) \right]^* \quad (12.36)$$

Las expresiones anteriores se pueden escribir en terminos de las **funciones asociadas de Legendre**  $P_l^m$ , en la forma:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (m \geq 0) \quad (12.37)$$

siendo  $P_l^m$  la funcion:

$$\boxed{P_l^m(u) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{du^{l+m}} (u^2-1)^l} \quad (12.38)$$

Para  $m = 0$  las funciones  $P_l^m(u)$  son polinomicas en  $u$  y se denoniman **polinomios de Legendre**.

Como aplicacion de estas ecuaciones obtengamos como se transforma la funcion de onda bajo una inversion espacial, denominada **transformacion de paridad**. Dicha transformacion se denota por  $\mathcal{P}$  y se define como la que actua sobre las funciones de onda  $\psi(\vec{r})$  como:

$$\mathcal{P} \psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}) . \quad (12.39)$$

La transformacion  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  corresponde, en coordenadas esfericas, a:

$$r \rightarrow r , \quad \theta \rightarrow \pi - \theta , \quad \phi \rightarrow \phi + \pi . \quad (12.40)$$

Observemos entonces que  $\sin \theta$  no cambia y que  $\cos \theta$  cambia de signo. Ademias,  $e^{im\phi} \rightarrow (-1)^m e^{im\phi}$  y, por tanto los armonicos esfericos cambian como:

$$\boxed{Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi)} \quad (12.41)$$

Entonces, concluimos que  $Y_l^m$  es una autofuncion de  $\mathcal{P}$  con autovalor  $(-1)^l$ .

## 13 Particula en un campo central

Consideremos una particula de masa  $M$  moviendose en tres dimensiones bajo la accion de un potencial central  $V(r)$ , dependiente de  $r = |\vec{r}|$ . Claramente  $V(r)$  es invariante bajo rotaciones y el hamiltoniano es:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2M} + V(r) . \quad (13.1)$$

Observemos que  $\vec{p}^2$  es proporcional al operador laplaciano  $\nabla^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . En coordenadas esfericas  $\vec{p}^2$  se puede escribir en terminos del momento angular:

$$\vec{p}^2 = (-i\hbar \vec{\nabla}_{\mathbb{R}^3})^2 = -\hbar^2 \nabla_{\mathbb{R}^3}^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\nabla_{\mathbb{S}^2}^2}{r^2} \right] . \quad (13.2)$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{L}^2 = -\hbar^2 \nabla_{\mathbb{S}^2}^2$ , llegamos a:

$$\vec{p}^2 = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{r^2} . \quad (13.3)$$

Por lo tanto, el hamiltoniano  $H$  de la partícula es:

$$H = -\frac{1}{2M} \frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{2Mr^2} + V(r) . \quad (13.4)$$

Esta claro de esta expresion que  $[H, \vec{L}] = 0$  y, por lo tanto, podremos diagonalizar simultaneamente  $H$ ,  $L^2$  y  $L_3$ . Sea  $\psi_{lm}(\vec{r})$  una autofuncion de estos tres operadores. Podemos escribir:

$$\psi_{lm}(r, \theta, \phi) = f_l(r) Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi) , \quad (13.5)$$

donde hemos introducido, por conveniencia, la funcion  $u_l(r) = r f_l(r)$  y nos hemos anticipado al hecho de que la ecuacion radial solo depende del numero cuantico  $l$ . Teniendo en cuenta que  $L^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$ , obtenemos:

$$H \psi_{lm}(r, \theta, \phi) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r} \frac{d^2 u_l}{dr^2} + \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} + V(r) \right) \frac{u_l}{r} \right] Y_l^m(\theta, \phi) . \quad (13.6)$$

Entonces, la ecuacion de autovalores:

$$H \psi_{lm} = E_l \psi_{lm} , \quad (13.7)$$

tiene la forma de la ecuacion diferencial ordinaria:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r) \right] u_l(r) = E_l u_l(r) \quad (13.8)$$

donde  $V_{eff}(r)$  es el siguiente **potencial efectivo**:

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2} \quad (13.9)$$

Hemos reducido la ecuacion de Schrödinger en 3d para un potencial central a un problema unidimensional en la variable radial  $r$ . El termino  $\hbar^2 l(l+1)/2Mr^2$  del potencial efectivo se denomina **barrera centrifuga** y se corresponde con el termino del mismo nombre en mecanica clasica. Observemos que la **funcion de onda parcial**  $u_l(r)$  no depende del numero cuantico  $m$ , por lo que cada valor de la energia va a tener una degeneracion igual a  $2l+1$ . Siguiendo la tradicion historica, los estados con diferentes valores de  $l$ , y con diferente degeneracion, reciben nombres especiales:

$l = 0$	$\implies$	onda $s$	$\implies$	<b>singlete</b> ,	(13.10)
$l = 1$	$\implies$	onda $p$	$\implies$	<b>triplete</b> ,	
$l = 2$	$\implies$	onda $d$	$\implies$	<b>quintuplete</b> ,	
$l = 3$	$\implies$	onda $f$	$\implies$	<b>septuplete</b>	

(le seguirian  $g, h, \dots$  y asi sucesivamente en orden alfabetico).

## 14 El rotor rigido

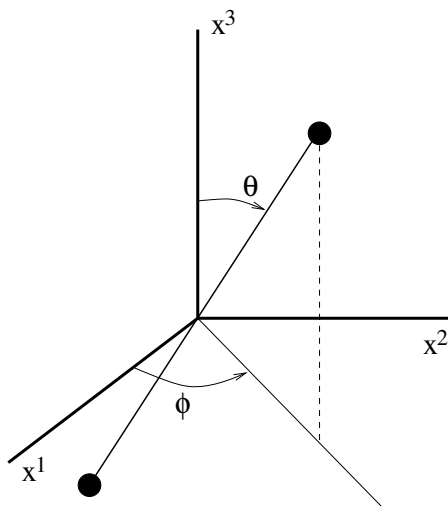


Figure 5: Rotor rigido lineal.

Consideremos una molécula diatómica rotando en torno a su centro de masas, que tomaremos como el origen de coordenadas. Sea  $I$  el momento de inercia de la molécula. Clasicamente, si  $\omega$  es la velocidad angular de rotación, el momento angular es  $L = I\omega$  y el hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(I\omega)^2}{I}, \quad \implies \quad \boxed{H = \frac{L^2}{2I}} \quad (14.1)$$

En la versión cuántica simplemente sustituimos  $L^2$  por el correspondiente operador. Como sabemos el espectro cuántico de  $L^2$ , de forma inmediata obtenemos el espectro de niveles de energía del rotor rígido:

$$\boxed{E_l = \frac{l(l+1)}{2I} \hbar^2} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (14.2)$$

Además, el nivel de energía  $E_l$  tiene una degeneración  $2l + 1$ . Las autofunciones de  $H$  son los armónicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \phi)$ , siendo  $(\theta, \phi)$  los ángulos que especifican la orientación de la molécula (vease la figura 5). La separación entre un nivel y el anterior es:

$$\Delta E_l \equiv E_l - E_{l-1} = \frac{l(l+1)}{2I} \hbar^2 - \frac{(l-1)l}{2I} \hbar^2, \quad (14.3)$$

es decir:

$$\boxed{\Delta E_l = \frac{\hbar^2 l}{I}} \quad (14.4)$$

Esta ecuacion reproduce bastante bien los espectros de rotacion de las molculas diatomicas.

## 15 Suma de momento angulares

Existen problemas fisicos en los cuales dos (o mas) momentos angulares estan presentes. Sean  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  estos dos momentos angulares.  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  podrian ser, por ejemplo, los momentos angulares totales de dos particulas distintas o el momento angular orbital y el espin de una misma particula. En cualquier caso sabemos que si  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  se representan, respectivamente, en los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , su suma se representa en el producto tensorial  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . De esta modo, podemos definir el **momento angular total**  $\vec{J}$  como:

$$\boxed{\vec{J} = \vec{J}_1 \otimes 1 + 1 \otimes \vec{J}_2} \quad (15.1)$$

(en muchas ocasiones escribiremos la expresion anterior simplemente como  $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ).

Como hemos visto,  $\vec{J}_1$  y  $\vec{J}_2$  se pueden representar en terminos de los vectores  $|j_1, m_1\rangle$  y  $|j_2, m_2\rangle$ , que forman una base de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  respectivamente. Como base de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  podemos escoger los siguientes  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$  vectores:

$$\boxed{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle, \quad -j_1 \leq m_1 \leq j_1, \quad -j_2 \leq m_2 \leq j_2} \quad (15.2)$$

Esta base de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  se denomina **base desacoplada**. Sus vectores son autovectores simultaneos de  $J_1^2$ ,  $J_2^2$ ,  $J_{1z}$  y  $J_{2z}$  (en esta seccion utilizaremos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  para referirnos a las tres direcciones de los ejes del espacio, mientras que los indices 1 y 2 se refieren a los dos momentos angulares que se suman).

De la definicion del momento angular total se sigue que  $J^2$  y  $J_z$  conmutan con  $J_1^2$  y  $J_2^2$ . Por tanto, podemos diagonalizar simultaneamente estos cuatro operadores y utilizar tambien sus autovectores simultaneos como base de estados. Sean  $|j_1, j_2; j, m\rangle$  los vectores que satisfacen:

$$\begin{aligned} J_1^2 |j_1, j_2; j, m\rangle &= \hbar^2 j_1(j_1 + 1) |j_1, j_2; j, m\rangle, \\ J_2^2 |j_1, j_2; j, m\rangle &= \hbar^2 j_2(j_2 + 1) |j_1, j_2; j, m\rangle, \\ J^2 |j_1, j_2; j, m\rangle &= \hbar^2 j(j + 1) |j_1, j_2; j, m\rangle, \\ J_z |j_1, j_2; j, m\rangle &= \hbar m |j_1, j_2; j, m\rangle. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Esta base de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  se denomina **base acoplada**. Con frecuencia etiquetaremos sus elementos solo con el momento angular total  $j$  y con la componente  $z$  de  $\vec{J}$ , que

hemos denotado por  $m$ :

$$\boxed{|j_1, j_2; j, m\rangle \equiv |j, m\rangle_c} \quad (15.4)$$

El objetivo de esta seccion es determinar los posibles valores de  $j$  y obtener los estados  $|j, m\rangle_c$  en terminos de los vectores de la base desacoplada. Empezaremos estudiando un caso sencillo antes de abordar el caso general.

## 15.1 Suma de dos espines 1/2

Consideremos la suma de dos espines 1/2, que denotaremos por  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$ . Los estados de la base desacoplada seran:

$$|++\rangle, \quad |+-\rangle, \quad |-+\rangle, \quad |--\rangle, \quad (15.5)$$

donde, por ejemplo:

$$|+-\rangle = |s_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle \otimes |s_2 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle. \quad (15.6)$$

Tambien denotaremos por  $\vec{S}_1$  y  $\vec{S}_2$  a los operadores  $\vec{S}_1 \otimes 1$  y  $1 \otimes \vec{S}_2$  respectivamente. En esta notacion debemos de recordar que  $\vec{S}_1$  actua sobre el primer estado del producto tensorial y  $\vec{S}_2$  sobre el segundo. El espin total  $\vec{S}$  es:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2, \quad (15.7)$$

y su componente  $z$  es:

$$S_z = S_{1z} + S_{2z}. \quad (15.8)$$

Consideremos el estado  $|++\rangle$ . Vamos a demostrar que es un autoestado de  $S_z$  y  $S^2$ . Claramente:

$$S_z |++\rangle = (S_{1z} + S_{2z}) |++\rangle = \hbar \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) |++\rangle = \hbar |++\rangle. \quad (15.9)$$

Ademas, si escribimos  $S^2$  como:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}, \quad (15.10)$$

y recordamos como actuan los operadores escalera, obtenemos:

$$S^2 |++\rangle = \left( 2\hbar^2 \frac{3}{4} + 2\frac{\hbar}{2}\frac{\hbar}{2} \right) |++\rangle = \frac{\hbar^2}{4}(6+2) |++\rangle, \quad (15.11)$$

es decir:

$$S^2 |++\rangle = 2\hbar^2 |++\rangle = 1(1+1)\hbar^2 |++\rangle. \quad (15.12)$$

Se sigue que  $|++\rangle$  es un autoestado de  $S^2$  con numero cuantico de espin  $s = 1$ . Como tambien es autoestado de  $S_z$  con autovalor  $\hbar$ , podemos escribir:

$$\boxed{|++\rangle = |s = 1, s_z = 1\rangle_c = |1, 1\rangle_c} \quad (15.13)$$

Para obtener los otros estados de la base acoplada con  $s = 1$  (es decir  $|1, 0\rangle_c$  y  $|1, -1\rangle_c$ ) actuemos con los operadores escalera del espín total. De la fórmula general (7.30) (con  $j = 1$  y  $m = 1$ ), obtenemos:

$$S_- |1, 1\rangle_c = \hbar \sqrt{1(1+1) - 1(1-1)} |1, 0\rangle_c = \hbar \sqrt{2} |1, 0\rangle_c . \quad (15.14)$$

Por otro lado, usando que  $S_- = S_{1-} + S_{2-}$ , tenemos:

$$S_- |1, 1\rangle_c = (S_{1-} + S_{2-}) |++\rangle = \hbar (|-+\rangle + |+-\rangle) . \quad (15.15)$$

Igualando ambos resultados, llegamos a:

$$\boxed{|1, 0\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle + |+-\rangle)} \quad (15.16)$$

Observemos que  $S_z |1, 0\rangle_c = 0$ , tal como debería de ser. Además, hay otro estado ortogonal a  $|1, 0\rangle_c$  con autovalor nulo de  $S_z$ :

$$\boxed{|0, 0\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle - |+-\rangle)} \quad (15.17)$$

Lo hemos denotado de esta forma porque tiene número cuántico  $s = 0$ , tal como se puede comprobar actuando sobre el con  $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ . En efecto, usando (15.10), llegamos a:

$$\begin{aligned} S^2 |0, 0\rangle_c &= \left(2\hbar^2 \frac{3}{4} + 2\frac{\hbar}{2} \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right) |0, 0\rangle_c + \frac{\hbar^2}{\sqrt{2}} (-|-+\rangle + |+-\rangle) = \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) \hbar^2 |0, 0\rangle_c - \hbar^2 |0, 0\rangle_c = 0 \end{aligned} \quad (15.18)$$

Además, podemos generar  $|1, -1\rangle_c$  actuando de nuevo con  $S_-$  sobre  $|1, 0\rangle_c$ . Se tiene:

$$S_- |1, 0\rangle_c = \hbar \sqrt{2} |1, -1\rangle_c , \quad (15.19)$$

y también:

$$(S_{1-} + S_{2-}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle + |+-\rangle) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} (|--\rangle + |--\rangle) = \sqrt{2} \hbar |--\rangle . \quad (15.20)$$

Igualando ambas expresiones llegamos a:

$$\boxed{|1, -1\rangle_c = |--\rangle} \quad (15.21)$$

Resumiendo, hemos obtenido que al acoplar dos partículas de espín 1/2 tenemos un triplete de estados de espín total uno ( $|1, 1\rangle_c$ ,  $|1, 0\rangle_c$  y  $|1, -1\rangle_c$ ) y un singlete de espín total cero ( $|0, 0\rangle_c$ ). Esto lo denotaremos simbólicamente como:

$$\boxed{\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1} \quad (15.22)$$

Observese que la dimension del espacio de Hilbert calculada para ambos lados de la expresion anterior es la misma:  $4 = 2 \times 2 = 1 + 3$ . Reunamos en una unica ecuacion las relaciones obtenidas entre ambas bases. Los estados de espin total uno son:

$$\begin{aligned}
 |1, 1\rangle_c &= |++\rangle \\
 |1, 0\rangle_c &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) \\
 |1, -1\rangle_c &= |--\rangle
 \end{aligned}
 \tag{15.23}$$

mientras que el que tiene espin total cero es:

$$|0, 0\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle - |-+\rangle)
 \tag{15.24}$$

Observemos que el estado singlete  $|0, 0\rangle_c$  no es mas que el estado entrelazado de Bell  $|\phi\rangle$ . El hecho de que sea singlete explica que sea invariante bajo rotaciones. Ademas, este estado con  $s = 0$  es antisimetrico con respecto al intercambio de las dos particulas, mientras que los estados con  $s = 1$  son simetricos con respecto a dicho intercambio.

## 16 Suma de momentos angulares generales

Consideremos ahora el caso general. Observemos en primer lugar que la componente  $z$  del momento angular total es diagonal en la base desacoplada:

$$J_z |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle .
 \tag{16.1}$$

El autovalor maximo de  $J_z$  ocurre cuando  $m_1 = j_1$  y  $m_2 = j_2$ . Veamos que el vector correspondiente es tambien autoestado de  $J^2$ . Para ello escribamos este operador como:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2 J_{1z} J_{2z} + J_{1+} J_{2-} + J_{1-} J_{2+} ,
 \tag{16.2}$$

y hagamoslo actuar sobre  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 J^2 |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle &= \hbar^2 (j_1(j_1 + 1) + j_2(j_2 + 1) + 2 j_1 j_2) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle = \\
 &= \hbar^2 (j_1 + j_2) (j_1 + j_2 + 1) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle .
 \end{aligned}
 \tag{16.3}$$

Asi pues el autovalor de  $J^2$  es de la forma  $\hbar^2 j(j + 1)$  con  $j = j_1 + j_2$ . Por tanto, podemos escribir:

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle_c = |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle
 \tag{16.4}$$

Para obtener los otros vectores con  $j = j_1 + j_2$ , actuemos con el operador  $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ . Aplicando (7.30) obtenemos:

$$J_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle_c = \hbar \sqrt{2(j_1 + j_2)} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle_c . \quad (16.5)$$

Por otra parte, actuando con  $J_{1-} + J_{2-}$  sobre  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$  llegamos a:

$$J_- |j_1 + j_2, j_1 + j_2\rangle_c = \hbar \left( \sqrt{2j_1} |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{2j_2} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle \right) , \quad (16.6)$$

y, despues de igualar estas dos ultimas expresiones, concluimos que:

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1\rangle_c = \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle \quad (16.7)$$

Iterando este procedimiento podemos obtener todos los  $2(j_1 + j_2) + 1$  estados con momento angular total igual a  $j = j_1 + j_2$ . Por otra parte, existe otro estado ortogonal al anterior, construido con los mismos vectores  $|j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle$  y  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle$  de la base desacoplada. Este estado es:

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle . \quad (16.8)$$

Puede comprobarse de manera inmediata que  $\langle \chi | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1 \rangle_c = 0$ . Ademas, claramente se verifica que:

$$J_z |\chi\rangle = (j_1 + j_2 - 1) |\chi\rangle , \quad (16.9)$$

y tambien se puede demostrar facilmente que  $|\chi\rangle$  es aniquilado por  $J_+ = J_{1+} + J_{2+}$ :

$$J_+ |\chi\rangle = \hbar \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} \sqrt{2j_1} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle - \hbar \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} \sqrt{2j_2} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle = 0 . \quad (16.10)$$

Asi pues, podemos identificar  $|\chi\rangle$  con  $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle_c$  y, en consecuencia, escribimos:

$$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1\rangle_c = \sqrt{\frac{j_2}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle - \sqrt{\frac{j_1}{j_1 + j_2}} |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle \quad (16.11)$$

Actuando con  $J_-$  sobre este estado podemos obtener todos los estados con  $j = j_1 + j_2 - 1$ .

En general puede probarse que se generan todos los momentos angulares comprendidos entre  $j_1 + j_2$  y  $|j_1 - j_2|$  en intervalos de una unidad. Es decir  $j$  puede tomar los valores:

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| . \quad (16.12)$$

$m$	$(m_1, m_2)$	# estados
2	(1, 1)	1
1	(1, 0), (0, 1)	2
0	(0, 0), (-1, 1), (1, -1)	3
-1	(-1, 0), (0, -1)	2
-2	(-1, -1)	1

Table 1: Estados generados al sumar dos momentos angulares  $j_1 = j_2 = 1$ .

Simbolicamente esto se escribe en la forma:

$$\boxed{j_1 \otimes j_2 = |j_1 - j_2| \oplus (|j_1 - j_2| + 1) \oplus \cdots \oplus (j_1 + j_2)} \quad (16.13)$$

Asi, por ejemplo, tenemos los siguientes casos particulares:

$$j_1 = j_2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2 ,$$

$$j_1 = 1, j_2 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} . \quad (16.14)$$

Para obtener estas descomposiciones del producto tensorial de vectores se procede como en el caso particular estudiado del producto  $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}$ . Ilustremos este procedimiento en otro caso particular: el producto  $1 \otimes 1$ . El numero de estados correspondientes a este caso segun los valores de la tercera componente  $m$  se muestra en la tabla 1. Como en el caso anterior empezariamos con el estado de mayor  $m$  ( $|1, 1\rangle|1, 1\rangle$ ) y actuariamos con  $J_-$ . Esto genera 5 estados correspondientes a  $j = 2$ . De los estados con  $m = 1$  hay uno que es ortogonal al estado  $|2, 1\rangle_c$  y que interpretamos como  $|1, 1\rangle_c$ . De nuevo, actuando con  $J_-$  sobre este ultimo estado generamos tres estados, que tienen  $j = 1$ . Por ultimo si  $m = 0$  hay tres estados y uno de ellos es ortogonal a  $|2, 0\rangle_c$  y  $|1, 0\rangle_c$ . En total tenemos  $5 + 3 + 1 = 9$  estados, los mismos que en la base desacoplada, es decir  $3 \times 3$ .

Es facil generalizar este analisis para cualquier valor de  $j_1$  y  $j_2$ . Supongamos, sin perdida de generalidad, que  $j_1 \geq j_2$ . Sea  $P(m)$  el **numero de estados con**  $m = m_1 + m_2$  **fijo**. Vamos a obtener el valor de  $P(m)$  para cualquier  $j_1, j_2$  y  $m$ . Analicemos los diferentes valores de  $m$ , empezando por el valor mas alto:

- $m = j_1 + j_2$

Este es el maximo valor de  $m$ . Solo hay un estado  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$ . Entonces:

$$P(j_1 + j_2) = 1 \quad (16.15)$$

- $m = j_1 + j_2 - 1$

En este caso hay dos estados:  $|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle$  y  $|j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle$ . Entonces:

$$P(j_1 + j_2 - 1) = 2 \quad (16.16)$$

Si seguimos disminuyendo la tercera componente del momento angular total, despues de  $n$  pasos llegamos al valor:

- $m = j_1 + j_2 - n$

Para este valor de  $m$  hay  $n + 1$  estados, que son:

$$|j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - n\rangle, \dots, |j_1, j_1 - n\rangle |j_2, j_2\rangle . \quad (16.17)$$

Por tanto, se tiene:

$$P(m) = n + 1 = j_1 + j_2 + 1 - m \quad (16.18)$$

Esto ocurre siempre que existan los estados  $|j_2, j_2 - n\rangle$  y  $|j_1, j_1 - n\rangle$ . Como  $j_1 \geq j_2$ , entonces  $P(n)$  sigue aumentando hasta llegar a  $n = 2j_2$ . En este caso  $m = j_1 + j_2 - 2j_2 = j_1 - j_2$  y, entonces,  $P(j_1 - j_2) = 2j_2 + 1$ . Aumentando mas  $n$  (o disminuyendo  $m$ ) la funcion  $P(m)$  no aumenta sino que sigue igual a  $2j_2 + 1$  hasta que  $n$  alcanza el valor  $2j_1$  (o sea cuando  $m = j_2 - j_1$ ), donde  $P(m)$  empieza a disminuir porque  $|j_1, j_1 - n\rangle$  ya no existe. De esta forma llegamos a un unico vector si  $m = -(j_1 + j_2)$ . Obviamente el resultado es simetrico si cambiamos  $m$  por  $-m$ . En resumen, para  $j_1 \geq j_2$ , tenemos:

$$P(m) = \begin{cases} 0 , & \text{si } |m| > j_1 - j_2 , \\ j_1 + j_2 + 1 - |m| , & \text{si } j_1 - j_2 \leq |m| \leq j_1 + j_2 , \\ 2j_2 + 1 , & \text{si } 0 \leq |m| \leq j_1 - j_2 . \end{cases} \quad (16.19)$$

Sabemos que si un valor de  $j$  esta permitido podemos generar los  $2j + 1$  vectores  $|j, m\rangle_c$  actuando con los operadores escalera. En principio podria haber mas de un multiplete por cada  $j$ . Sea  $N(j)$  el numero de multipletes para un valor de  $j$  dado. Esta funcion  $N(j)$  esta relacionada con la funcion  $P(m)$  definida anteriormente y

cuyo valor esta dado por (16.19). En efecto, puesto que  $m$  ocurre si y solo si  $j \geq |m|$ , tenemos:

$$\boxed{P(m) = \sum_{j \geq m} N(j)} \quad (16.20)$$

A partir de esta ecuacion, se sigue que:

$$P(j) - P(j+1) = \sum_{i \geq j} N(i) - \sum_{i \geq j+1} N(i) = N(j) , \quad (16.21)$$

es decir  $N(j)$  esta dada por la siguiente diferencia de valores de  $P$ :

$$\boxed{N(j) = P(j) - P(j+1)} \quad (16.22)$$

Teniendo en cuenta el valor obtenido para  $P(j)$  en (16.19), obtenemos:

$$\boxed{N(j) = 1 \quad \text{para } j_1 - j_2 \leq j \leq j_1 + j_2} \quad (16.23)$$

y es cero en otro caso. Este resultado prueba la formula general (16.13) para la composicion de momentos angulares. Como comprobacion adicional verifiquemos que la dimension del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  es la correcta, es decir  $\dim(\mathcal{H}_1) \times \dim(\mathcal{H}_2) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ . En efecto, debido a la descomposicion de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  en suma directa, tenemos (si  $j_1 \geq j_2$ ):

$$\dim[\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2] = \sum_{j=j_1-j_2}^{j=j_1+j_2} (2j+1) . \quad (16.24)$$

Hagamos un cambio en el indice de la suma e introduzcamos un nuevo indice  $i$ , relacionado con  $j$  por medio de la expresion  $j = j_1 - j_2 + i$ . Para el nuevo indice  $i$  el limite inferior de la suma es  $i = 0$ , mientras que el limite superior es  $i = 2j_2$ . Puesto que  $2j+1 = 2(j_1 - j_2) + 1 + 2i$ , se tiene:

$$\dim[\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2] = \sum_{i=0}^{2j_2} [2(j_1 - j_2) + 1 + 2i] . \quad (16.25)$$

Utilizando la propiedad:

$$\sum_{i=0}^A i = \frac{A(A+1)}{2} , \quad (16.26)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \dim[\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2] &= (2j_1 - 2j_2 + 1)(2j_2 + 1) + 2 \sum_{i=0}^{2j_2} i = \\ &= (2j_1 - 2j_2 + 1)(2j_2 + 1) + 2j_2(2j_2 + 1) . \end{aligned} \quad (16.27)$$

Es decir:

$$\dim[\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2] = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) , \quad (16.28)$$

que es ciertamente el resultado correcto.

Escribamos ahora la relacion entre las bases acoplada y desacoplada en la forma:

$$\boxed{|j, m\rangle_c = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1 m_2; j m}^{j_1 j_2} |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle} \quad (16.29)$$

Los coeficientes  $C_{m_1 m_2; j m}^{j_1 j_2}$  se denominan **coeficientes de Clebsch-Gordan(CG)**. Dichos coeficientes estan univocamente definidos excepto por una fase global de los estados. Esta fase se fija por medio de la convencion:

$$C_{j_1 j_2 - j_1; j j}^{j_1 j_2} \implies \text{real} \geq 0 , \quad (16.30)$$

que hace que, por aplicacion del operador escalera  $J_-$ , todos los coeficientes de CG sean reales. Otra notacion para los CG es:

$$\boxed{C_{m_1 m_2; j m}^{j_1 j_2} = \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j m \rangle} \quad (16.31)$$

Para el caso  $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$  ya hemos calculado en (15.23) and (15.24) los CG, con el resultado:

$$\begin{aligned} C_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}; 11}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= 1 , & C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}; 10}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}; 10}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \\ C_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}; 1-1}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= 1 , & C_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}; 00}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= -C_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}; 00}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \end{aligned} \quad (16.32)$$

Existen tablas de coeficientes de CG para los diferentes acoplos, asi como programas de ordenador que los calculan.